Vl. 23.10.14

Äquivalenz BF

Bsp: $\neg(a \vee b) = A(a,b)$

a	b	$a \vee b$	$A(a,b)$	$\neg a$	$\neg b$	$B(a,b)$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	W	F	F	W	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	F	W	W	W	W

$(\neg a) \wedge (\neg b) = B(a,b)$

$\Rightarrow$ $A(a,b) \Leftrightarrow B(a,b)$ ist stets W.

bzw. $A(a,b)$ und $B(a,b)$ haben identische WWT's.

Def: Zwei k-stellige BF $A(a_1,\dots,a_k)$ und $B(a_1,\dots,a_k)$ heißen äquivalent, falls ihre WWT's übereinstimmen.

Schreibweise:

$$A(a,b) \Leftrightarrow B(a,b)$$

Satz:

Vor: a, b, c seien Aussagen

Beh: Dann gelten folgende Äquivalenzen

(1) $\neg(\neg a) \Longleftrightarrow a$

(2) $a \wedge b \Longleftrightarrow b \wedge a$ (Kommutativ)

(3) $a \vee b \Longleftrightarrow b \vee a$

(4) $\neg(a \vee b) \Longleftrightarrow (\neg a) \wedge (\neg b)$ [de Morgansche Regeln]

(5) $\neg(a \wedge b) \Longleftrightarrow (\neg a) \vee (\neg b)$

(6) $(a \wedge b) \vee c \Longleftrightarrow (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

(7) $(a \vee b) \wedge c \Longleftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

(Distributiv)

(8) $(a \wedge b) \wedge c \Longleftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$

(9) $(a \vee b) \vee c \Longleftrightarrow a \vee (b \vee c)$

(Assoziativ)

(10) $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow ((\neg b) \Rightarrow (\neg a))$

Kontraposition

(11) $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow (b \vee (\neg a))$

(12) $(a \Leftrightarrow b) \Longleftrightarrow [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)]$

(13) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (b \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b)$

$\underset{HA}{\Longleftrightarrow} (b \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg a)$

(14) $(a \oplus b) \Longleftrightarrow \neg(a \Leftrightarrow b)$

(15) $a \wedge (\neg a) \Leftrightarrow \underline{F}$

$(AC) \doteq F$ (0-stellige BF)

(16) $a \vee (\neg a) \Leftrightarrow W$

(17) $a \wedge W \Leftrightarrow a$, (18) $a \vee F \Leftrightarrow a$

Beweis: zu (13)

⇒ Wahrheitswertetabellen aufstellen und vergleichen!

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$b \vee \neg a$	$a \vee \neg b$	$B(a,b)$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	W	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W	W

$A(a,b) = a \Leftrightarrow b$

$B(a,b) = \underline{(b \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b)}$

$C(a,b) = (a \wedge b) \underline{\vee} (\neg a \wedge \neg b)$

$A(a,b)$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg b$	$C(a,b)$
W	W	F	W
F	F	F	F
F	F	F	F
W	F	W	W

$\Rightarrow$ WWT's von A, B, C stimmen überein

$\Rightarrow$ $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$

qed.

Andere Form des Beweises:

Beh: $B(a,b) \Leftrightarrow C(a,b)$

Bew: $B(a,b) = \underbrace{(b \vee \neg a)}_{c} \wedge (a \vee \neg b)$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} (a \vee \neg b) \wedge \underbrace{(b \vee \neg a)}_{c}$$

$$\overset{(7)}{\Leftrightarrow} \underbrace{(a \wedge (b \vee \neg a))}_{(7)} \vee \underbrace{(\neg b \wedge (b \vee \neg a))}_{(7)}$$

$$\overset{(7)}{\Leftrightarrow} [(a \wedge b) \vee \underbrace{(a \wedge \neg a)}_{F}]$$

$$\vee\ [\underbrace{(\neg b \wedge b)}_{F} \vee (\neg b \wedge \neg a)]$$

$$\overset{(15)}{\Leftrightarrow} [\underbrace{(a \wedge b) \vee F}] \vee [F \vee [\neg b \wedge \neg a]]$$

$$\overset{(18)}{\Leftrightarrow} (a \wedge b) \vee (\neg b \wedge \neg a)$$

qed.

1.1.2. Aussageformen

Def: Ersetzt man in einer Aussage a eine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine Aussageform $a(x)$.

Bsp:

$a: \quad 4 \geq 0$ Aussage

$a(x): \quad x^2 \geq 0$ Aussageform

$a(m):$ m^2 durch 2 teilbar $\Rightarrow m$ durch 2 teilbar

Bei Aussageformen wird durch Quantoren angegeben, auf welche Werte für die enthaltene Variable x (bzw. m u.sw) sich die Aussageform bezieht.

Def: (Allquantor $\forall$)

$\forall$ "Für alle"

$\forall x \in D: a(x)$ "Für alle x aus der Menge D gilt $a(x)$"

$:$ gilt

Bsp:

$\forall m \in \mathbb{N}: m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$

Def: (Existenzquantor $\exists$)

$\exists$ "Es existiert ein"

$\exists x \in D: a(x)$ "Es existiert ein $x \in D$ und $a(x)$"

Bsp: $\exists m \in \mathbb{N}: m^2 = m$

Aussageformen lesen und schreiben können

Aussageform	Text
$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$	Das Quadrat jeder reellen Zahl ist ≥ 0
$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: m \leq n$ $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: m \leq n$ gilt.	Die Menge der nat. Zahlen besitzt ein Minimum
$\forall x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R}:$ $(x<z<y) \vee (y<z<x)$	Zwischen je 2 reellen Zahlen liegt eine dritte
$\forall m \in \mathbb{N}: m^2$ durch 3 teilbar $\Rightarrow m$ durch 3 teilbar	"Falls das Quadrat einer nat. Zahl durch 3 teilbar ist, so ist sie selbst auch durch 3 teilbar"

Negation von Aussageformen

Bsp: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

$\neg(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0)$

$\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \neg(x^2 \geq 0)$

Satz:

$\neg(\forall x \in D: a(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in D: \neg a(x)$

Bsp: $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n$

$\neg(\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n)$

$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \neg(n^2 = n)$

Satz:

$\neg(\exists x \in D: a(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in D: \neg a(x)$

Bsp:

"Die Menge der reellen Z. besitzt ein Minimum" :

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y$$

"Die Menge der reellen Z. besitzt kein Minimum" :

$$\neg\left(\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \neg\left(\forall y \in \mathbb{R} : x \leq y\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : \neg(x \leq y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : \ y < x$$

Bsp: Negieren Sie

$$\forall m \in \mathbb{N} : \frac{m^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{m}{3} \in \mathbb{N}$$

Lösung:

$$\exists m \in \mathbb{N} : \neg\left(\frac{m^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{m}{3} \in \mathbb{N}\right)$$

$$\neg(a \Rightarrow b)$$

$$\Leftrightarrow \neg(b \vee \neg a)$$

$$\Leftrightarrow \neg b \wedge a$$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{m}{3} \notin \mathbb{N} \wedge \frac{m^2}{3} \in \mathbb{N}$$

HA: Kap. 1.1.3 durcharbeiten + Übung 1

Mo