Bezeichnungen:

Vl, 5.1.17

$$V = H(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}) = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \vec{a}_i \cdot \lambda_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

= Lineare Hülle von M

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\} = M$ EZS

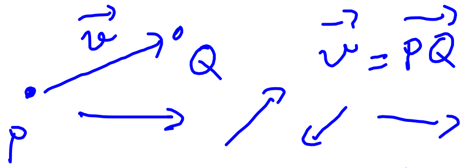
$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\} = M$ System lin. unabh. V.
$\Rightarrow$ Basis

$\dim(V)$ = Anzahl der Basis-vektoren

Jan 5-08:24

4.3. Affine Räume

früher:



$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

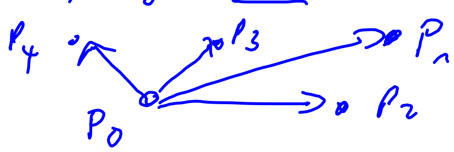
$$\mathbb{R}^2 = V = H\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

alle Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Sei $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Pkt.

$$A = \{ P \mid P = \boxed{P_0} \oplus \vec{v},\ \vec{v} \in V \}$$

Menge alle Punkte im $\mathbb{R}^2$



Jan 5-08:31

Def: Ein Tripel

$$(A, (V, \oplus, \odot), \boxplus)$$

heißt affiner Raum, falls gilt:

1) A ist eine Menge (von Punkten)
2) $(V, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum mit den Operationen $\oplus$, $\odot$
3) $\boxplus$ ist eine Operation die als „Abtragen eines Vektors aus V an einen Punkt aus A" definiert und folgende Eigenschaften besitzt

Jan 5-08:36

a) $\boxplus : (A \times V) \longrightarrow A$

$$\boxplus(P, v) \longrightarrow P \boxplus v \in A$$

($\boxplus$ führt nicht aus A heraus)

b) $(P \boxplus v) \boxplus w$

$$= P \boxplus (v \oplus w)$$

$= P$ plus (Vektor + Vektor)

$= (P$ plus Vektor$)$ plus Vektor

$(\forall P \in A \quad \forall v, w \in V)$

c) $P \boxplus 0 = P$

$\forall P \in A$ und für den Nullvektor $0 \in V$.

Jan 5-08:38

$\oplus$ Vektor $\oplus$ Vektor = Vektor

$\odot$ Zahl $\odot$ Vektor = Vektor

$\boxed{+}$ Punkt $\boxed{+}$ Vektor = Punkt.

Reihenfolge ist festgelegt.

~~Vektor $\boxed{+}$ Punkt~~

Satz: Sei $(A, (V, \oplus, \odot), \boxed{+})$ ein affiner Raum.

Bed: $\forall P_1, P_2 \in A \; \exists$ genau ein $v \in V$ mit $P_1 \boxed{+} v = P_2$

Jan 5-08:43

Satz: Sei $(A, (V, \oplus, \cdot), \boxed{+})$ ein affiner Raum. Sei $P_0 \in A$ ein beliebiger Pkt $\in A$.

Dann gilt:

$$A = \{ P \mid P = P_0 \boxed{+} v, \; v \in V \}$$
$$= P_0 \boxed{+} V$$

Satz:

Ist $V = H(M)$ und $M = \{a_1, \dots, a_k\}$ eine Basis von V dann gilt:

$$\forall v \in V: v = a_1 \odot \lambda_1 \oplus a_2 \odot \lambda_2 \oplus \dots \oplus a_k \odot \lambda_k$$

Jan 5-08:45

und folglich ist

$$A = \{ P \mid P = P_0 \boxed{+} (\lambda_1 \odot a_1 \oplus \dots \oplus \lambda_k \odot a_k) \; \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

$$= P_0 \boxed{+} H(\{a_1, \dots, a_k\})$$

Def: Sei $A = P_0 \boxed{+} V$
$= P_0 \boxed{+} H(\{a_1, \dots, a_k\})$
und $\{a_1, \dots, a_k\}$ sei Basis von V.
Dann heißt P_0 = Aufpunkt.

Jan 5-08:48

$\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Dim}(V) = k$
= Dimension von A.
$\{P_0, a_1, \dots, a_k\}$ Koordinaten-System von A

Bsp 1: Ebene im $\mathbb{R}^n = A$

$A: \; P = P_0 \boxed{+} [\lambda \odot \vec{a} \oplus \mu \odot \vec{b}]$

$V = H(\{\vec{a}, \vec{b}\})$ $\vec{a}, \vec{b}$ l. unabh.
$\Rightarrow \dim(V) = 2$

$\boxed{+}, \odot, \oplus$ Komponentenweise
$P \in \mathbb{R}^n, \; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

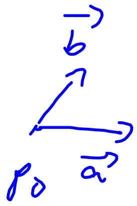
Jan 5-08:51

$\Rightarrow (A, (V, \oplus, \odot), \boxplus)$

ist ein affiner R. der Dim 2.

Koordinatensystem:

$\{P_0, \vec{a}, \vec{b}\}$



Bsp 2: Gerade in $\mathbb{R}^n$

$A: \; P = P_0 \boxplus \lambda \odot \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Affiner Raum der Dim 1, K.S = $\{P, \vec{a}\}$

Jan 5-08:56

Bsp 3: Auch Mengen von Fkt. können affine Räume sein.

affiner Raum der Dimension 3:

Sei V die Mge aller Polynome bis 2. Ordg:

$$V = \left\{ f_{\vec{a}} \;\middle|\; f_{\vec{a}} : x \to f_{\vec{a}}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$\left.\begin{matrix} \oplus \\ \odot \end{matrix}\right\}$ Bildweise, d.h.

Jan 5-08:58

$$(f_{\vec{a}_1} \oplus f_{\vec{a}_2})(x) = f_{\vec{a}_1}(x) + f_{\vec{a}_2}(x)$$

$$(\lambda \odot f_{\vec{a}})(x) = \lambda \cdot f_{\vec{a}}(x)$$

$\Rightarrow$ $(V, \oplus, \odot)$ VR über

Dienstag: Dimension 3

$$V = H\left(\left\{ f_{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, f_{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, f_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}\right)$$

$$f_{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{x^0}}{1} + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$f_{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}(x) = 0^{=a_0} + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = \underline{\underline{x}}$$

$$f_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}(x) = \underline{\underline{x^2}}$$

Jan 5-09:00

Sei

$$A = \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g : x \to e^x + f_{\vec{a}}(x),\ f_{\vec{a}} \in V \right\}$$

$h : x \to h(x) = e^x$ = Aufpunkt

$\boxed{+}$ Bildweise Addition.

$$(h \boxed{+} f_{\vec{a}})(x) = h(x) + f_{\vec{a}}(x)$$

$\Rightarrow$ $(A, (V, \oplus, \odot), \boxed{+})$ ist
$\uparrow$ Menge von Polyn. Bildweise

Jan 5-09:04

ein Affiner Raum der Dim 3
mit dem KS:

$$\{e^x, 1, x, x^2\} \text{ bzw.}$$

$$\{h, f_{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

Bsp: $A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\t\\2t-1\end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

und $\boxplus$, $\odot$, $\oplus$ von Tripeln gedacht komponentenweise.

Jan 5-09:07

a) Ist A ein VR, affiner R oder weder noch?

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1\\t\\2t-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\t\\2t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \cdot t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{A}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \middle| P = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \boxplus H\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\right)}.$$

Jan 5-09:10

$$V = H\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ v \,\middle|\, v = t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \; t\in\mathbb{R} \right\}$$

VR der Dim 1

$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ = Aufpunkt im $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (A, (H, +, \cdot), +)$

ist ein affiner Raum der Dimension 1

mit dem KS: $\left\{ \underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\vec{a}}{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}} \right\}$.

Jan 5-09:15

Bsp 2:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\t\\2t-1\end{pmatrix} \,\middle|\, t \geq 0, \; t\in\mathbb{R} \right\}$$

ist kein affiner Raum.

weil:

Aufpunkt $+ \; V$ ← kein VR

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow V = \left\{ t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, t \geq 0 \right\}$$

Ist kein VR (enthält die inversen Vektoren $-\vec{v}$ nicht)

$\Rightarrow A$ kein affiner Raum.

Jan 5-09:18

Bsp 3

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \checkmark$$

ds ist ein VR. bzw. ein affiner Raum mit dem Aufpunkt $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} A & = & P_0 & + & A \\ & & \| & & \| \\ \| & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & + & V = H\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right) \end{array}$$

Menge aller Punkte $\hat{=}$ Menge aller Ortsvektoren zu den Punkt.

Jan 5-09:21

5. Matrizen

Jan 5-09:26