Vl. 13.11.17

1.4.3. Pot, $\sqrt{}$, Log

$$x^n = a$$

Geg x, n, Ges a

Potenzieren

Geg: n, a
Ges: x
Wurzelziehen
$x := \sqrt[n]{a}$

Geg: x, a Ges: n
logarithmieren
$n := \log_x(a)$

Nov 13-10:20

Regeln auswendig:

Potenzregeln:

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

2) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

3) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

4) $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ $\quad \forall n \in \mathbb{Q}$

5) $x^0 = 1$

6) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Wurzelgesetze:

$\sqrt[k]{x^n} = x^{\left(\frac{n}{k}\right)}$

$\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$

Nov 13-10:24

Logarithmengesetze:

$a > 0$

1) $\log_a(a) = 1$

2) $\log_a(1) = 0$

3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
(Produktregel)

4) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
(Quotientenregel)

5) Potenzregel:
$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

6) Reziproke Regel: $\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$

Nov 13-10:26

7) Transformationsregel:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$\lg(x) = \log_{10}(x)$$

$$\mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$$

Bsp: Vereinfachen Sie

$$T = \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\left(\lg(5000) - \lg(5)\right) \cdot y^3}{x^2 \sqrt{y^4}}$$

Nov 13-10:29

Lösung:

$$T = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot (lg(5000) - lg(5))\, y^3}{x^2 y^{4/2}}$$

$$= \underbrace{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-2}}_{x^{2/3-2}} (lg(5000) - lg(5)) \underbrace{y^3 y^{-2}}_{y^{3-2}}$$

$$= x^{-\frac{4}{3}} \left(lg(\underbrace{5000}_{5\cdot 10^3}) - lg(5) \right) y$$

$$= \frac{y}{x^{\frac{4}{3}}} \left(lg(5 \cdot 10^3) - lg(5) \right)$$

$$= \frac{y}{\sqrt[3]{x^4}} \left(\cancel{lg(5)} + lg(10^3) - \cancel{lg(5)} \right)$$

$$= \frac{y}{\sqrt[3]{x^4}} \cdot 3\, \underbrace{lg(10)}_{=1} = \frac{3y}{\sqrt[3]{x^4}}$$

Nov 13-10:34

1.4.4. Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen

1) $2x^2 - 3x + 4 \overset{(=)}{\leq} x - 2$

quadratische Gleichungen und Ungleichungen

2) $|x+2| \overset{(=)}{\leq} x^2 - 2$

Betrags-Gleichungen und Ungleichungen

Fallunterscheidung:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Nov 13-10:39

⇒ Fälle: (Betrag auflösen)

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{für } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{für } x < -2 \end{cases}$$

⇒ Fall 1: $\boxed{x \geq -2}$

$$|x+2| = \boxed{\underbrace{x+2 = x^2-2}_{\text{quadr. Gl. lösen}}}$$

⇒ Fall 2: $\boxed{x < -2}$

$$|x+2| = \boxed{-x-2 = x^2-2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$$

Nov 13-10:42

3) (1) $\sqrt{x-2} \overset{(=)}{\leq} x+1, \; x \geq 2$

Wurzelgleichungen und Ungleichungen, ges. $\mathbb{L}_{\sqrt{\,}}$

$$\sqrt{x-2} \leq x+1 \quad | \; ^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x-2 \leq (x+1)^2}_{\text{Lösungsmenge}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 \supseteq \mathbb{L}_{\sqrt{\,}}$$

Alle Lösungen $\mathbb{L}_2$ von (2) in (1) einsetzen und Probe machen:

$$\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{L}_2 \mid (1) \text{ ist erfüllt} \}$$

Nov 13-10:44

$$a \le b \not\Rightarrow a^2 \le b^2$$

$$-7 \le -3 \not\Rightarrow (-7)^2 \le (-3)^2$$

1.4.5 Parabeln und Geraden

$y = ax + b$ skizzieren

$y = ax^2 + bx + c$ Normalform

$= a(x - x_1)(x - x_2)$ Linearfaktor-Form (x_1, x_2 = Nullstellen)

p-q-Formel

$= a(x - x_s) + y_s$ Scheitelpunktsform

$S = (x_s, y_s)$ Scheitelpunkt.

Nov 13-10:47

1.4.6. Summen- und Produktzeichen

10^1

$10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 +$

$1000000 + 10000000$

$$= \sum_{i=1}^{7} 10^i = 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^7$$

$1 + 2 + 3 + \ldots ? \ldots + 100$

$$= \sum_{i=1}^{100} i$$

Nov 13-10:51

Def: wir bezeichnen für $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Summe der a_i für $i = 1$ bis n

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

Produkt der a_i für $i = 1$ bis n

a_i = Summanden (Faktoren)

i = Laufindex

$1, n$ = Summations-(Produkt-)grenzen

Nov 13-10:54

Darstellung mit Hilfe des Summen- (bzw) Produktzeichens

Bsp: 1) $S = \underset{i=1}{\frac{1}{3}} + \underset{2}{\frac{2}{4}} + \underset{3}{\frac{3}{5}} + \underset{4}{\frac{4}{6}} + \underset{5}{\frac{5}{7}} \quad \underset{i}{a_i}$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+2}$$

Nov 13-10:57

2) $S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \frac{5}{32}$ a_i

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$

i: 1 2 3 4 5

$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{5} (-1)^i \cdot \frac{i}{2^i}$

3) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i+1}$

Indexverschiebung

$= \sum_{i=2}^{5} (-1)^i \frac{1}{i}$

Nov 13-11:01

4) $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$ $a_i =$

$i =$ 1 2 3 4 ...

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$

$0! = 1$

$= \sum_{i=1}^{\infty}$ } HA

5) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$

$= \sum_{i=1}^{\infty}$

Nov 13-11:06

Indexverschiebung

Es gilt:

Satz: Sei $c > 0$, $c \in \mathbb{N}$. Es gilt:

1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+c}^{n+c} a_{i-c} = \sum_{i=1-c}^{n-c} a_{i+c}$$

2) $$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1+c}^{n+c} a_{i-c} = \prod_{i=1-c}^{n-c} a_{i+c}$$

Nov 13-11:11

Bew.: zu 1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=1+c}^{n+c} a_{i-c} = a_{1+c-c} + a_{1+c+1-c} + \dots + a_{n+c-c}$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

q.e.d.

Bsp:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{i^2}{i+1} (-1)^i = \sum_{i=5}^{10+4} \frac{(i-4)^2 (-1)^{i-4}}{i-4+1}$$

$c = 4$

Nov 13-11:14

$$= \sum_{i=5}^{14} \frac{(i-4)^2}{i-3} (-1)^{i-4}$$

Bsp:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{i^2}{i+1} (-1)^i = \sum_{i=1-1}^{10-1} \frac{(i+1)^2}{i+2} (-1)^{i+1}$$

$i \to i+1$

$$= \sum_{i=0}^{9} \frac{(i+1)^2}{i+2} (-1)^{i+1}$$

Nov 13-11:17

$n!$ und $\binom{n}{k}$ und $x \bmod (m)$

Def: 1) $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad (n \geq 1)$$

$$0! = 1$$

"n - Fakultät"

2) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$ für $n \geq k$, $n, k \in \mathbb{N}_0$

heißt "n über k"
(Binomialkoeffizient)

Nov 13-11:21

Modulo-Rechnung

Ganzzahlige Division mit Rest

Bsp.:

1) $7 \equiv 1 \mod 3$

bzw. $7 \bmod 3 = 1$

D.h., bei Division von 7 durch 3 bleibt Rest 1 übrig.

2) $9 \equiv 0 \mod 3$

bzw. $9 \bmod 3 = 0$

Nov 13-11:23

3) $14 \bmod 6 = 2$

$14 \equiv 2 \pmod 6$

Nov 13-11:29