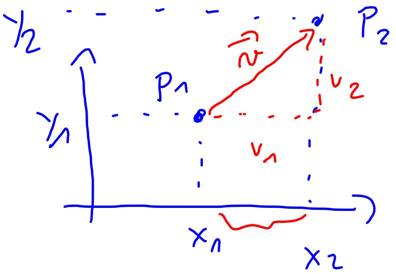
16.11.17

2. Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

2.1. Definition



$\vec v$ = gerichtete Strecke von P_1 und P_2

$P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$

$$\vec v = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_2 \end{pmatrix}$$

v_i = Koordinaten von $\vec v$

Nov 16-08:24

Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$:

Def: Seien

$P_1=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ und

$P_2=(x_1^{(2)},\dots,x_n^{(2)})$ 2 Punkte

im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die gerichtete Strecke

$$\vec v = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} - x_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Vektor von P_1 und P_2.

Nov 16-08:29

Die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist

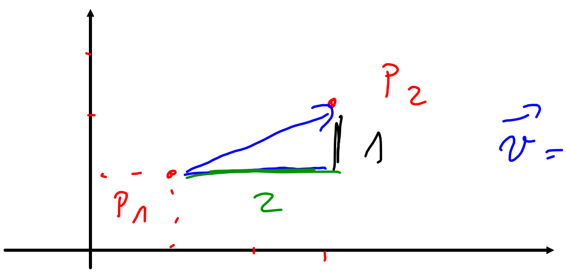
$$V = \{\vec{v} \mid \exists P_1 \in \mathbb{R}^n \; \exists P_2 \in \mathbb{R}^n : \vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2}\}$$

und heißt n-dimensionaler reeller Vektorraum,

(= Menge aller n-Tupel im $\mathbb{R}^n$)

Nov 16-08:32

Bsp: $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

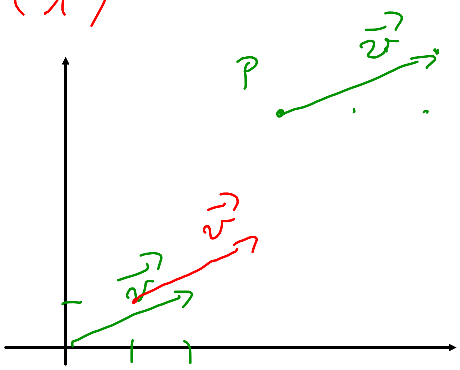


$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \text{"}P_2 - P_1\text{"} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nov 16-08:34

Aufgabe:
Skizzieren Sie den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Bemerkungen:

1) Die Lage eines Vektors ist nicht eindeutig. Sie wird erst eindeutig, mit Angabe eines Start- oder eines Endpunktes

Nov 16-08:36

an dem der Vektor abgetragen wird.

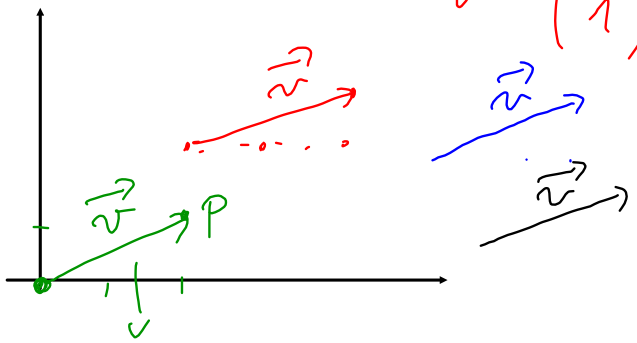
2) Richtung und Länge von Vektoren $\vec{v}$ sind durch die Koordinaten $v_1, \dots, v_n$ eindeutig bestimmt.

Def: Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Vektor. Dann heißt $\vec{OP}$ mit $P = (v_1, \dots, v_n)$ und O = Koordinatenursprung,

Nov 16-08:40

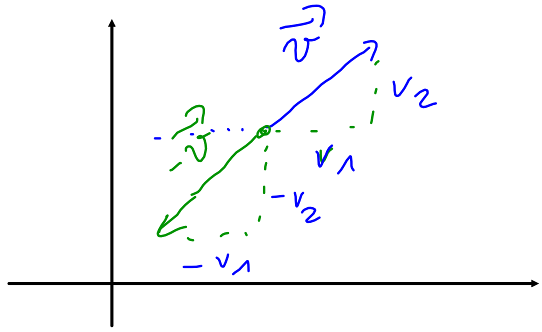
Ortsvektor von P.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Ortsvektor von P

Nov 16-08:43



Def: Der Vektor

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$$ heißt Gegenvektor

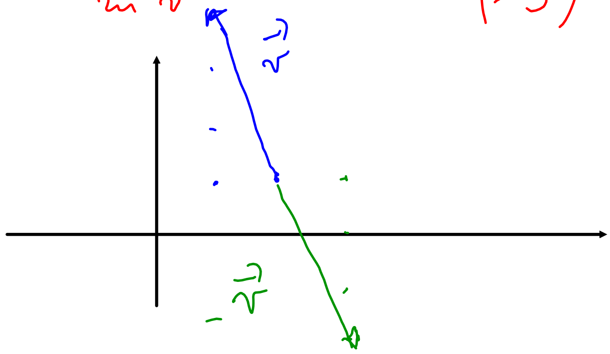
zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

(Hat gleiche Länge, um 180° gedrehte Richtung)

Nov 16-08:46

Bsp: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v}$: $-\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$



Nov 16-08:53

Physik:

Größen, die außer einem Wert eine Richtung haben, werden durch Vektoren beschrieben

$\vec{F}$ Kräfte

$\vec{a}$ = Beschleunigungen

$\vec{v}$ = Geschwindigkeiten

.....

Nov 16-08:55

Punkte und Vektoren

Schreibweise:

$P = (x_1, \dots, x_n)$ Punkt

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Vektor

P_1, P_2 $\quad P_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),\ i = 1, 2$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} - x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Nov 16-08:57

$\oplus$: Abtragen eines Vektors an einem Punkt = Punkt

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} \iff P_2 = P_1 \oplus \vec{v}$$

$= \text{"} P_2 - P_1 \text{"}$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} + v_1 \\ \vdots \\ x_n^{(1)} + v_n \end{pmatrix}$$

Punkt $\oplus$ Vektor = Punkt

Nov 16-08:59

Bsp 1:

Geg: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ges: $\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2}$

Lösg: $\vec{v} = $ "$P_2 - P_1$" $= \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \\ -1-3 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}}$

Bsp 2:

Geg: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ges: P_2 : $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{v}$

Nov 16-09:03

($\vec{v}$ wird an P_1 abgetragen. Wie lauten die Koordinaten des Endpunkts?)

Lösg: $P_1 \oplus \vec{v} = $ "$P_1 + \vec{v}$"

$= \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+0 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = P_2}}$

Bsp 3: geg: $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

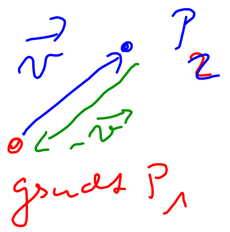
a) Endpunkt des Vektors

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nov 16-09:06

An welchem Punkt P_1 wurde $\vec{v}$ abgetragen?

Lösung:



$$P_1 = P_2 \oplus -\vec{v} \quad = \text{"} P_2 - \vec{v} \text{"}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 3 - 0 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

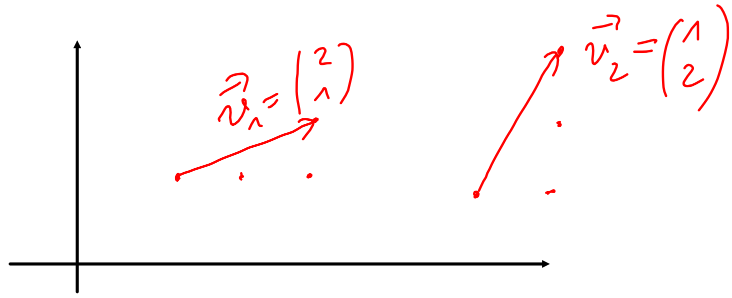
Nov 16-09:09

Bezeichnungen:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$	$\vec{a}$ u. $\vec{b}$ sind parallel
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$	$\vec{a}$ u. $\vec{b}$ sind parallel in gleicher Richtung
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	parallel in unterschiedl. Richtung
$\vec{a} \perp \vec{b}$	$\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.
$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$	Nullvektor

Nov 16-09:11

2.2. Anordnung von Vektoren



$\vec{v}_1 \; \overset{?}{\leq} \; \vec{v}_2$?

$\overset{<}{>}$?

$\Rightarrow$ Vektoren kann man nicht ordnen (weil sie durch mehr als 1 Komponente beschrieben werden).

Nov 16-09:14

Es gibt kein $<$ und kein $>$ in V.
Sondern nur $=$, $\neq$

Def: Zwei Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

sind gleich ($\vec{v} = \vec{w}$) falls

1. ihre Komponenten übereinstimmen, d.h.
$$\vec{v} = \vec{w} \iff v_i = w_i \;\; \forall i = 1, \dots, n$$

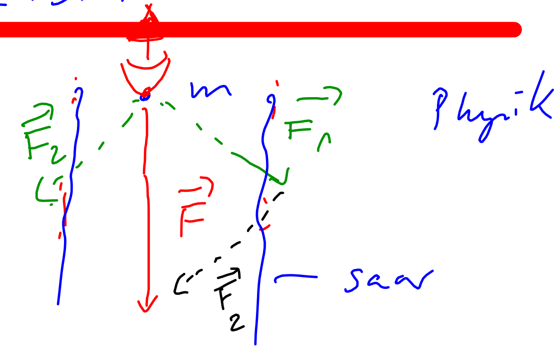
oder

2. Länge und Richtung stimmen überein

Nov 16-09:18

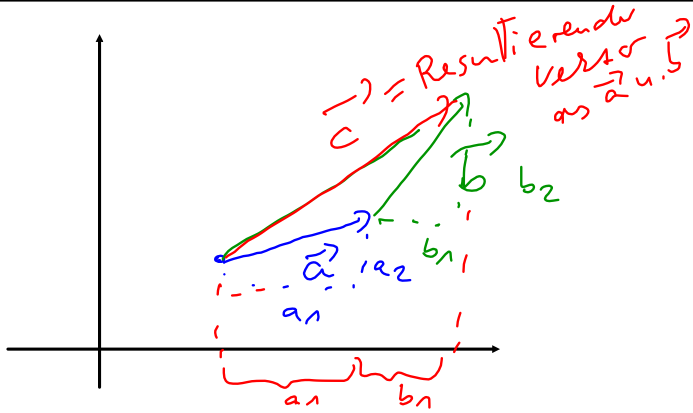
2.3. Addition und Subtraktion von Vektoren

2.3.1. Addition



Rechnerische Addition

Nov 16-09:21



$$\vec c = \vec a \boxed{+} \vec b$$

"Aneinanderhängen von 2 Vektoren"

$$\Rightarrow \vec c = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \boxed{+} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(Komponentenweise Addition)

Nov 16-09:25

Subtraktion

Def: sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ und $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix}$

der Gegenvektor von $\vec{b}$.

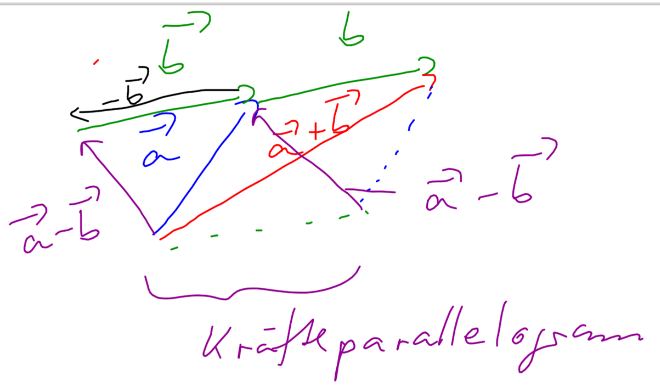
Dann ist

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

Komponentenweise Subtraktion

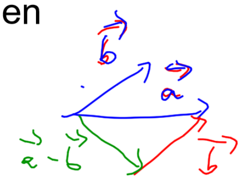
Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ = Addition von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$.

Nov 16-09:29



Geometrische Bedeutung der Subtraktion:
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

d.h., an die Spitze von $\vec{a}$ wird die Spitze von $\vec{b}$ abgetragen



Nov 18-18:35