Vl. 30.10.17

Raumänderung!!!!!!

Mo 2+3. DS 4201

ab sofort!

Do 1. DS 4201

Okt 30-10:14

1.2.3 Die Vollständige Induktion

Wird angewandt zum Beweis von Aussageformen der Art:

Satz: Vor: $n_0 \in \mathbb{N}_0$

Beh: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$: $A(n)$

Bsp: Bezeichnen $n, m, n_0, m_0 \in \mathbb{N}$

1) $\underbrace{\forall n \geq 1}_{n_0} : \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$

Okt 30-10:16

$2)\ \forall\, \underset{n_0}{n \geq 4} :\ \underbrace{n! > 2^n}_{A(n)}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$$
$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$$

Was ist größer ? n! oder 2^n ?

Vermutung: n! ab $n = 4$

Okt 30-10:19

Das Prinzip der Vollst. Induktion (VI)

Satz: Vor: $n, n_0 \in \mathbb{N}$

Beh: $\forall\, n \geq n_0 : A(n)$

Bew:

IA (Induktionsanfang)

Wir zeigen, dass $A(n)$ für den Startwert $n = n_0$ gilt, also $A(n_0) = W$.

Okt 30-10:22

IS (Induktionsschritt)

Wir zeigen folgende Implikation

Vor: $A(n) = W$

$\Downarrow$

Bel: $A(n+1) = W$

[n ist dabei variabel, d.h. beliebig]

Wir zeigen, wenn $A(n) = W$ für ein beliebiges n, dann gilt A auch für den Nachfolger $n+1$ (also $A(n+1) = W$)

Okt 30-10:23

Ergebnis

$$\underbrace{A(n_0)=W}_{IA} \overset{IS}{\Longrightarrow} \underbrace{A(n_0+1)=W}_{W} \overset{IS}{\Longrightarrow} \underbrace{A(n_0+2)=W}_{W} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : A(n) = W$$

$$\left[\overbrace{A(n_0)=W}^{IA} \wedge \left(A(n)=W \overset{IS}{\Longrightarrow} A(n+1)=W\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall n \geq n_0 : A(n) = W$$

Okt 30-10:26

Bsp: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n$

Satz: Vor: $n \in \mathbb{N}$

Beh: $\forall n \geq 1: \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$

Bew: (V.I.)

IA: Sei $n = n_0 = 1$:

$A(1)$ $LS = \sum_{i=1}^{1} i = 1$

$RS = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

$\Rightarrow LS = RS \Rightarrow A(1) = W$

Okt 30-10:29

IS:

Vor: Es gilt $\overbrace{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}^{A(n)}$

Beh: Es gilt $\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{A(n+1)}$

Bew:

$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} i$

so zerlegen, dass LS_{Vor} vorkommt: $= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$

Ersetzen von LS_{Vor} durch RS_{Vor}: $= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

Umformen, so lange bis RS_{Beh} dasteht: $= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$= RS_{Beh}$. qed.

Okt 30-10:33

Bsp 2

Satz:

Vor: $n \in \mathbb{N}$

Beh: $\forall n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Bew: (VI)

IA: $n_0 = 1$:

Beh: $A(n_0)$: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

Bew: $LS = 1^3 = 1$, $RS = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$

$\Rightarrow LS = RS$ ged.

Okt 30-10:37

IS: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

Vor: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Beh: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2 \overbrace{(n+1+1)^2}^{(n+2)^2 = n^2+4n+4}}{4}$

Bew:

$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} (i^3)$

Zerlegen $= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$

Ersetzen $= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

Okt 30-10:42

Umformen $= \dfrac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

$= \dfrac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4}$

$= (n+1)^2\left[n^2+4n+4\right]$

$= \dfrac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$

$= \underline{RS_{Bel}}$ qed.

Okt 30-11:04

Bsp. 3

Satz: Vor: $n \in \mathbb{N}$

Bel: $\forall n \geq 4: \underbrace{2^n < n!}_{A(n)}$

Bew: (VI)

IA: $n = n_0 = 4$

Bel: $A(4)$: $2^4 < 4!$

Bew: $2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$\Rightarrow 2^4 = 16 < 4! = 24$ qed.

Okt 30-11:08

IS:

Vor: $\overset{a}{2^n} < \overset{b}{n!} \quad (n \geq 4)$

Beh: $2^{(n+1)} < (n+1)!$

Bew:

$\boxed{LS_{Beh}} = 2^{(n+1)}$

Zerlegen $= (2^n) \cdot 2$

Ersehen $\boxed{<} n! \cdot 2$

$= n!\,(1+1)$

Umformen $\underset{(\text{weil } 1 \leq n)}{\leq} n!\,(n+1) = (n+1)!$

$= \boxed{RS_{Beh}}$

$\Rightarrow LS_{Beh} < RS_{Beh}$ q.e.d.

$a < b$

$a \cdot c < b \cdot c$ für $c > 0$

$(n+1)!$
$= \underbrace{1 \cdot 2 \cdots n}_{} \cdot (n+1)$
$= n!\,(n+1)$

Okt 30-11:10

Weiter geht es am:

Do 1. DS
R 4201
VL.

Okt 30-11:20