Vl. 30.11.17

Bsp: Gegeben

g_1: $P_1 = (2,1,3)$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geben Sie eine Gerade g_2 an und

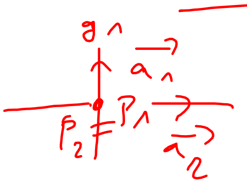
a) $g_2 \perp g_1$

b) $g_2 \ \backslash|\backslash\ g_1$ im Abstand 2

c) $g_2 \parallel g_1$ im Abstand 3

Nov 30-08:16

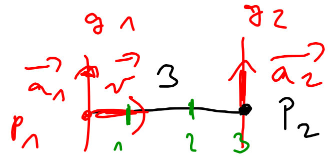
Lösung: Zu a)



g_2: $P_2 = P_1 = (2,1,3)$

$$\vec{a}_2 \perp \vec{a}_1: \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu c)



g_2: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1$

P_2: sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\vec{v} \perp \vec{a}_1$

P_2 = von P_1 aus 3 Schritte in

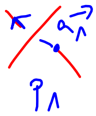
Nov 30-08:16

Richtg $\vec v$ gegeben:

$$P_2 = P_1 + 3 \cdot \frac{\vec v}{|\vec v|}$$

$$= (2,1,3) + \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

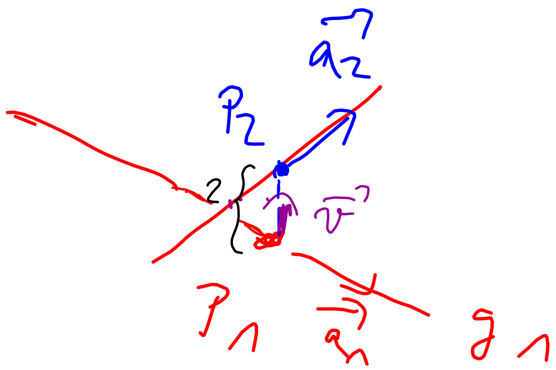
$$= \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{3}{\sqrt{2}},\ 3\right)$$

zu b) g_2  g_1 mit Abstand 2

g_2: $\vec a_2 \not\parallel \vec a_1$ z.B. $\vec a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$P_2 = P_1 + 2 \cdot \frac{\vec v}{|\vec v|}$$

Nov 30-08:29



Wir konstruieren zunächst $\vec v$ mit $\vec v \perp \vec a_1 \wedge \vec v \perp \vec a_2$

z.B. $\vec v = \vec a_1 \times \vec a_2$

$$= \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 + 2 \cdot \frac{\vec v}{|\vec v|}$$

Nov 30-08:34

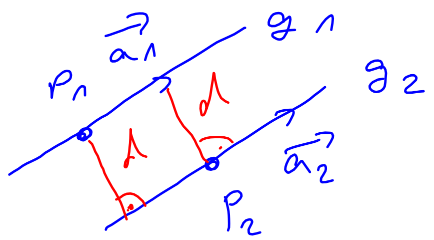
$$P_2 = (2,1,3) + 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}$$

$$= (2,1,3) + \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}}$$

$$= \underline{\underline{\left(2 - \frac{2}{\sqrt{6}},\ 1 + \frac{2}{\sqrt{6}},\ 3 - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)}}$$

Nov 30-08:38

3.2.3. Abstand zweier paralleler Geraden



Def: Der Abstand zweier paralleler Geraden $g_1 \parallel g_2$ ist gegeben durch:

$$d(g_1, g_2) = d(P_1, g_2) = d(P_2, g_1)$$

Nov 30-08:41

Satz: Seien $P_1, P_2, \vec{a_1}, \vec{a_2} \in \mathbb{R}^3$
(d.h. 2 Geraden g_1, g_2 im $\mathbb{R}^3$ gegeben) und $g_1 \parallel g_2$.

Dann gilt:

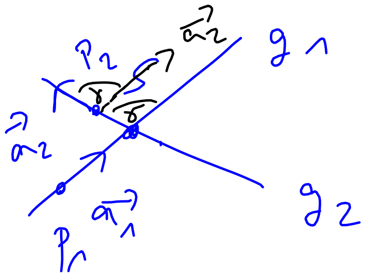
$$d(g_1, g_2) = d(P_1, g_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a_2}|}{|\vec{a_2}|}$$

und

$$d(g_1, g_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a_1}|}{|\vec{a_1}|} = d(P_2, g_1)$$

Nov 30-08:43

3.2.4 Schnittwinkel und Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden



Def: Seien $g_1 \times g_2$.
Dann heißt der Punkt S
mit $S \in g_1 \wedge S \in g_2$, d.h.
$d(S, g_1) = d(S, g_2) = 0$

Nov 30-08:49

Schnittpunkt von g_1 und g_2.

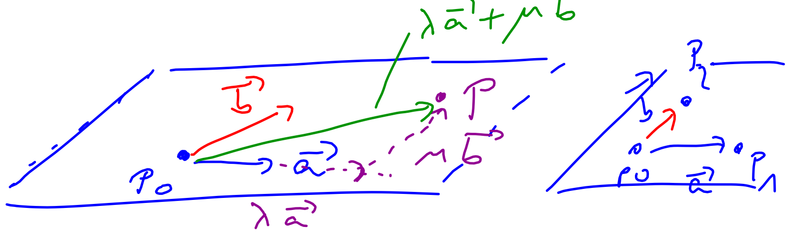
Der Schnittwinkel $\sphericalangle(g_1, g_2)$ zwischen g_1 und g_2 ist als Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren definiert

$$\sphericalangle(g_1, g_2) = \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \underbrace{\cos^{-1}}_{\arccos}\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right).$$

Nov 30-08:52

3.3. Ebenen im $\mathbb{R}^3$

3.3.1. Parameter-Darstellung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$



Def: Punkt-Richtungsform

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

kurz: $\mathcal{E}: P_0, \vec{a}, \vec{b}$

Nov 30-09:00

Dabei sind $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

$\vec{a}, \vec{b}$ = Richtungsvektoren

P_0 = Aufpunkt

μ, λ = Parameter

3-Punkte-Form

Seien P_0, P_1, P_2 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

$$E = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1} + \mu \overrightarrow{P_0P_2}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Kurz: $E: P_0, P_1, P_2$

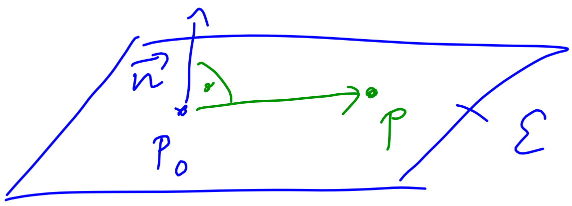
Nov 30-09:04

Punkt-Richtungsform | 3 Punkteform

$$P_0, \vec{a}, \vec{b} \longrightarrow P_0,\ P_1 = P_0 + \vec{a},\ P_2 = P_0 + \vec{b}$$

$$P_0,\ \vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1},\ \vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2} \longleftarrow P_0, P_1, P_2$$

3.3.2. Nichtparametrische bzw. Normalform einer Ebene



Nov 30-09:07

Def: Ein Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} \perp \mathcal{E}$ heißt Normalenvektor der Ebene $\mathcal{E}$

Wir sehen:

$$P \in \mathcal{E} \iff \vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P} \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Def: Sei $\vec{n} \perp \mathcal{E}$ ein Normalenvektor von $\mathcal{E}$. Sei $P_0 \in \mathcal{E}$. Dann heißt

$$\mathcal{E} = \{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \}$$

nichtparametrische bzw.

Nov 30-09:10

Normalform der Ebene $\mathcal{E}$

Kurz:

$\mathcal{E}: \; P_0, \vec{n}$

Wie sieht die Normalform genau aus?

Seien $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}.$$

Nov 30-09:13

Dann ist:

$$\underline{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$= \underline{n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) + n_z(z-z_0)}$$

$$= \underline{0}$$

$\Leftrightarrow$ Ebenen-Normalform-Gleichung:

$$\boxed{n_x x + n_y y + n_z z = d}$$

mit $d = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$

Bsp: $2x + 3y - 4z = 2$

1. Ebene, 2. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Nov 30-09:17

Gerade: $y = mx + d$

$$mx - 1 \cdot y = d$$

$$ax + by = d$$

Ebene: $ax + by + cz = d$

Bsp: Sei durch

$$2x + 3y + 4z = 12, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

eine Ebene gegeben.

a) Wie lauten Aufpunkt und Normalenvektor?

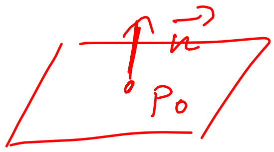
Nov 30-09:20

Lösung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

P_0: Ein Punkt, der die Ebenengleichung erfüllt:

z.B.:

$P_0 = (0, 0, 3)$

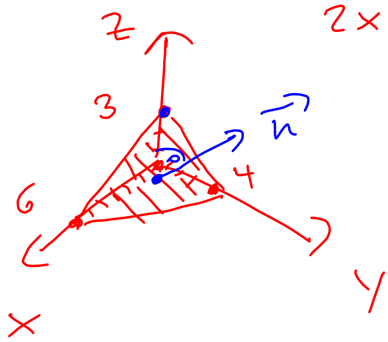


b) Skizzieren Sie die Ebene im $\mathbb{R}^3$

Nov 30-09:23

Wir brauchen 3 Punkte.
Am besten die Schnittpunkte
mit den Koordinatenachsen.

$2x + 3y + 4z = 12$



$S_x = (6, 0, 0)$, $S_y = (0, 4, 0)$

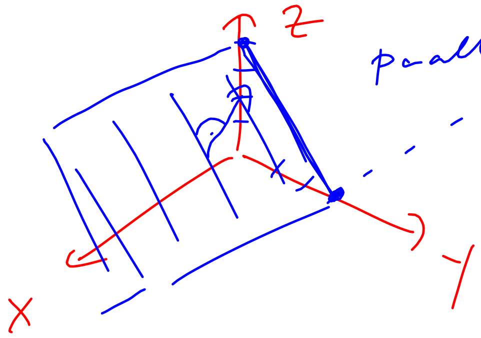
$S_z = (0, 0, 3)$

Nov 30-09:26

Bsp: Skizzieren Sie die

Ebene: $4y + 3z = 12, \quad x,y,z \in \mathbb{R}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ kein Schnittpunkt mit x-Achse



parallel zur x-Achse

2 Schnittpunkte: $S_y = (0, 3, 0)$
$S_z = (0, 0, 4)$

Nov 30-09:29

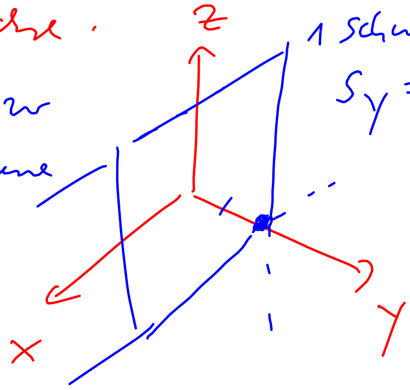
Bsp: Skizzieren Sie:

$3y = 6 \qquad x,y,z \in \mathbb{R}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

keinen Schnittpunkt auf z- und auf x-Achse.

parallel zur x-z-Ebene



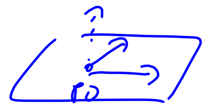
1 Schnittpunkt: $S_y = (0, 2, 0)$

Nov 30-09:33

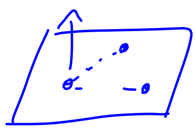
Umrechnen:

Normalform — **Parameterform**

$P_0, \vec{n} = \vec{a} \otimes \vec{b} \longleftarrow P_0, \vec{a}, \vec{b}$

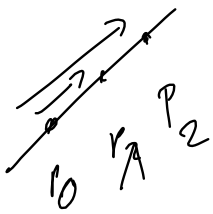


$P_0, \vec{n} \longrightarrow$ 3 Punkte bestimmen, die die Ebenengleichung (1) erfüllen und nicht auf einer Geraden liegen, (P_0, P_1, P_2 durch Einsetzen von x, y, z in (1) bestimmen)



$n_x x + n_y y + n_z z = d \quad (1)$

Nov 30-09:37



liegen auf einer Geraden $\Longleftrightarrow \overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P_2}$

Bsp: Sei $\mathcal{E}_0: P_0, \vec{n}_0$

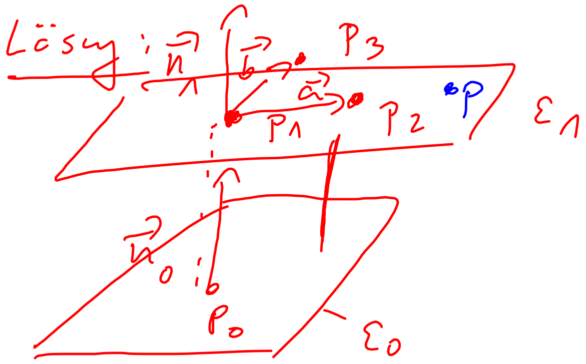
Ges: Ebene $\mathcal{E}_1$ mit

$\mathcal{E}_1 \parallel \mathcal{E}_0$ im Abstand 2

in Parameterform!

Nov 30-09:40

Lösung:



$$P_1 = P_0 + 2 \cdot \frac{\vec{n}_0}{|\vec{n}_0|}$$

$\vec{n}_1 = \vec{n}_0 \implies$ 3 Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmen, die die NF von E_1 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$ erfüllen

$\implies \vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen

Nov 30-09:43