Vl. 6. 11. 2017 – Teil 2

1.4. Rechnen mit reellen Zahlen

1.4.1. Zahlenaufbau

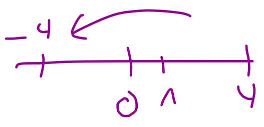
$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ nat. Zahlen

$+, (*, \wedge), <, >, =, \neq$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ nat. Zahlen mit 0

Problem: $x + 7 = 3$

ist nicht in $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$) lösbar. $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x+7=3)$



$x + \overset{0}{\underline{7 - 7}} = 3 - 7$

$x = -4$

a inverses Element $-a$

Nov 6-11:56

$\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\}$

$+, -, *, \wedge, =, \neq, <, >$

Problem: $x \cdot 7 = 3$

ist nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar

(inverse Zahl bzgl. $\cdot$: $a^{-1} = \frac{1}{a}$: $a \cdot a^{-1} = 1$)

$\underbrace{x \cdot 7 \cdot 7^{-1}}_{\underline{\underline{x}}} = 3 \cdot 7^{-1} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$

Nov 6-12:01

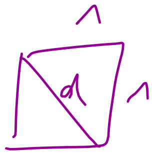
↓

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N} \right\}$$

$+, -, *, /, =, \neq, <, >$

Menge aller Brüche (= rationale Zahlen)

Problem:



Pytagoras:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$\Rightarrow d^2 = 2$

Man kann zeigen: die Lösung von $d^2 = 2$ ist kein Bruch, d.h. $d \notin \mathbb{Q}$

Problem:  $-$Umfang $= ?$ $U \notin \mathbb{Q}$

$(U = 2\pi)$

Nov 6-12:03

D.h. Brüche reichen für die Praxis nicht aus!

Satz: Brüche sind endliche oder periodische Dezimalzahlen und umgekehrt

Bsp.:

$\frac{4}{5} = 0{,}8$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

endliche Dezimalzahl

$\frac{1}{3} = 0{,}3\overline{33}$

Periode

$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{66}$

Nov 6-12:09

⇒ Def. Irrationale Zahlen

$\mathbb{I} = \{ x \mid x$ ist eine nichtendliche, nichtperiodische Dezimalzahl $\}$

zB: $\sqrt{2}$ – berechenbar

π, e – nicht berechenbar

↓

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$

$+, -, \cdot, /, \wedge, \underline{\sqrt{x}}_{x \geq 0}, \log_a(x)$ $\quad x>0, a>0$

$=, \neq, <, >$

Nov 6-12:15

Problem:

$\underline{x^2 + 4 = 0}$ ist nicht in $\mathbb{R}$ lösbar

$x^2 = -4$

$x_{1/2} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Lösg:

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4}$

$= \underbrace{\sqrt{-1}}_{j} \cdot 2$

j symbolische Zahl

↓

$\Rightarrow \mathbb{R} \cup \{j\} \Rightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + jb \,;\, a, b \in \mathbb{R} \}$

$j = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit

komplexe Zahlen ($\rightarrow$ Mathe 2)

$+, -, \cdot, /, \wedge, \sqrt{\ }, \log, =, \neq$

↓ weitere Erweiterungen:

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2 \to \ldots \to \mathbb{C}^n$

Nov 6-12:19

Beachte:

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ abzählbar

Σ

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ überabzählbar

$\int$

$\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$

Nov 6-12:23

1.4.2. Brüche als Dezimalzahlen

Satz: Brüche sind endliche oder periodische Dezimalzahlen und umgekehrt.

Bruch $\rightarrow$ Dezimalzahl

$\frac{15}{9} \rightarrow 15 : 9 = \underline{\underline{1{,}66\overline{6}}}$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 60 \\ 54 \\ \hline 60 \end{array}$$

$\frac{25}{100} \rightarrow \underline{\underline{0{,}25}}$

Nov 6-12:27

Dezimalzahl → Bruch

$$0{,}\underbrace{257}_{\cdot 10^3} \rightarrow = \frac{257}{1000}$$

$$12{,}12\overset{1\,\text{stelle}}{\boxed{\overline{3}}} = p$$

$$\Rightarrow p \cdot 10^{\text{stellenzahl}} = p \cdot 10^1 = 121{,}23\overline{3}$$

$$\Rightarrow p \cdot 10 - p = \begin{array}{r} 121{,}23\overline{3} \\ -\ 12{,}12\overline{3} \\ \hline 109{,}110 \end{array}$$

Nov 6-12:29

$$\Rightarrow p \cdot 10 - p = 109{,}11$$

$$\Rightarrow p \cdot (10-1) = \frac{10911}{100}$$

$$\Rightarrow p = \frac{10911}{900}$$ Kürzen

Bsp: $p = 12{,}12\overline{\underbrace{345}_{k}}$

$$\begin{array}{lr} p \cdot 10^k = p \cdot 1000 & = 12123{,}45\overline{345} \\ -\ p & -00012{,}12\overline{345} \\ \hline p \cdot 999 & = 12111{,}33 \end{array}$$

Nov 6-12:32

$$\Rightarrow p \cdot 999 = \frac{1211133}{100}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1211133}{99900}$$

Kürzen!

Regel: 1) p mit 10^k multiplizieren, wobei k die Länge der Ziffernfolge ist, die sich periodisch fortsetzt

2) $p \cdot 10^k - p$ bilden (endliche Dezimalzahl)

3) nach p umstellen.

Nov 6-12:35

$\Rightarrow$ Bruchrechnung üben!

$\Rightarrow$ Brückenkursskript.

$\Rightarrow$ Kürzen,

$\Rightarrow$ Dividieren $\quad \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$\frac{126}{72} : \frac{144}{8} = \frac{126 \cdot 8}{144 \cdot 72}$$

$$\frac{126}{72} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 36} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 21}{2 \cdot 3 \cdot 12}$$

$$= \frac{\cancel{2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 7}{\cancel{2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 4} = \underline{\frac{7}{4}}$$

Nov 6-12:40

$$\frac{144}{8} = \frac{2\cdot 72}{2\cdot 4} = \frac{2\cdot 2\cdot 36}{2\cdot 2\cdot 2}$$

$$= \frac{\cancel{2\cdot 2\cdot 2}\cdot 18}{\cancel{2\cdot 2\cdot 2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{126}{72} : \frac{144}{8} = \frac{7}{4} : 18$$

$$= \frac{7}{4\cdot 18} = \underline{\underline{\frac{7}{72}}}$$

Nov 6-12:47

$\Rightarrow$ <u>Hauptnennerbildung</u>

$$\frac{3}{72} + \frac{4}{6} - \frac{2}{4} = B$$

Nenner	Primfaktoren	Erweitern
72	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$	1
6	$2\cdot 3$	$2\cdot 2\cdot 3 = 12$
4	$2\cdot 2$	$2\cdot 3\cdot 3 = 18$
HN	$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$	72

Nov 6-12:49

$$B = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 18}{72}$$

$$= \frac{3 + 48 + 36}{72} = \frac{87}{72} = \frac{29}{24}$$

Ordnen von Brüchen

$$\underbrace{-\frac{6}{7} \qquad -\frac{5}{6}}$$

HN bilden:

$$-\frac{36}{42} < -\frac{35}{42}$$

Nov 6-12:52

Satz: (Vor: alles was wir über $\mathbb{Q}$ wissen) a

Beh: $\sqrt{2}$ ist kein Bruch b

Bew: Indirekt: $\neg b \Rightarrow \neg a$

$\sqrt{2}$ ist ein Bruch $\Rightarrow$ Widerspruch zu dem was wir bisher schon wissen

Sei $\sqrt{2}$ also ein Bruch.

$\Rightarrow \exists\, n$ und $\exists\, m$ mit

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

Nov 6-12:55

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei $\frac{p}{q}$ nicht weiter kürzbar ist,

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \; (*)$

$\Rightarrow p^2$ ist gerade

$\Rightarrow p$ ist gerade

$\Rightarrow p = 2 \cdot r \quad r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow p^2 = 4r^2 \underset{(*)}{=} 2q^2 \quad /:2$

$\Rightarrow q^2 = 2 \cdot r^2$

Nov 6-12:58

$\Rightarrow q^2$ ist gerade

$\Rightarrow q$ ist gerade

$\Rightarrow q = 2 \cdot k \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underline{\sqrt{2} = \frac{p}{q}}$ der <u>nicht kürzbare</u> Bruch

ist plötzlich kürzbar

$= \frac{\cancel{2} \cdot r}{\cancel{2} \cdot k}$ <u>Widerspruch</u>

$\Rightarrow \sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}$ ist $\notin \mathbb{Q}$ qed,

Nov 6-13:01