Vl. 4.12.2017

Informationen zum MCQ-Test:

Max. 10 Punkte erreichbar als Bonus auf die Klausur "draufgerechnet, falls man diese besteht (>=40P).

verwendbar: 2 DIN A4 Bl. = 4 Seiten,
kein TR!!

Termin: Do 11.11.2017, Dauer: 1 DS = 90 Minuten

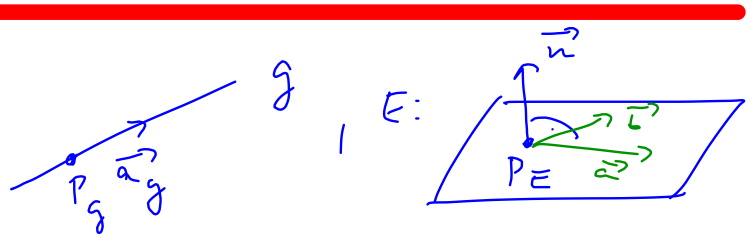
Klausur: Verwendbar: 2 DIN A4-Blätter = 4 Seiten beliebig beschrieben +
TR ohne Grafik
nicht programmiert.
(CAS)

Dez 4-10:10

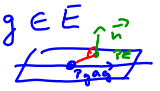
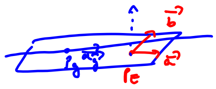
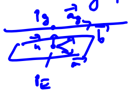
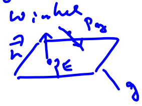
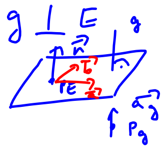
3.4. Lage von Geraden und Ebenen zu Ebenen

Vl. 4.12.17

3.4.1. Lage zwischen Geraden und Ebenen



Dez 4-10:20

Lage	Erläuterungen	Kriterien an die Vektorprodukte
$g \in E$ 	$\vec a_g \perp \vec n \wedge P_g \in E$	$\vec a_g \cdot \vec n = 0 \wedge$ $\overrightarrow{P_gP_E} \cdot \vec n = 0$
	$\vec n$ durch $\vec a \otimes \vec b$ ersetzen:	$\vec a_g \cdot (\vec a \otimes \vec b) = [\vec a_g, \vec a, \vec b] = 0$ $\wedge [\overrightarrow{P_gP_E}, \vec a, \vec b] = 0$
$g \parallel E \wedge g \notin E$ 	$\vec a_g \perp \vec n \wedge P_g \notin E$	$\vec a_g \cdot \vec n = 0 \wedge \overrightarrow{P_gP_E} \cdot \vec n \neq 0$ oder $[\vec a_g, \vec a, \vec b] = 0 \wedge [\overrightarrow{P_gP_E}, \vec a, \vec b] \neq 0$
$g \times E$, egal welcher Winkel 	$\vec a_g \not\perp \vec n$	$\vec a_g \cdot \vec n \neq 0$ oder $[\vec a_g, \vec a, \vec b] \neq 0$
$g \perp E$ 	$\vec a_g \parallel \vec n$	$\vec a_g \otimes \vec n = \vec 0$ oder $\vec a_g \otimes (\vec a \otimes \vec b) = \vec 0$

Dez 4-10:23

Bsp: geg: $g: P_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec a_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E: P_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec n = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Welche Lage hat g zu E?

---

g, E Lage?

$\vec a_g \cdot \vec n = 0$?

ja → $(g \parallel E \vee g \in E)$

$\overrightarrow{P_gP_E} \cdot \vec n = 0$?

ja → $g \in E$

n → $g \parallel E$ mit Abstand

nein → $(g \times E \vee g \perp E)$

$\vec a_g \otimes \vec n = \vec 0$

ja → $g \perp E$

nein → $g \times E$ nicht senkrecht

Dez 4-10:39

$$\vec{a}_g \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow g \parallel E \vee g \in E$$

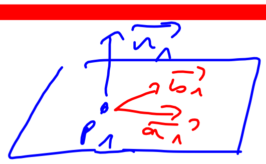
$$\overrightarrow{P_g P_E} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}2-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Ergebnis $g \in E$.

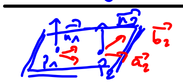
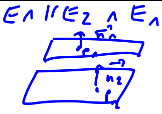
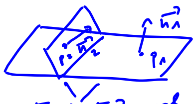
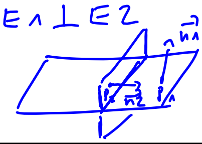
Dez 4-10:46

3.4.2. Lage zweier Ebenen zueinander

E_1: 

E_2: P_2, $\underbrace{\vec{n}_2}_{\vec{a}_2,\ \vec{b}_2}$

Dez 4-10:49

Lage	Erläuterungen	Kriterien an Vektorprodukte
 $E_1 = E_2$	$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \wedge P_1 \in E_2$ Bei Parameterformen $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ durch $\vec{a_1} \otimes \vec{b_1}$ und $\vec{a_2} \otimes \vec{b_2}$ ersetzen.	$\vec{n_1} \otimes \vec{n_2} = \vec{0} \wedge$ $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n_2} = 0$ $(\vec{a_1} \otimes \vec{b_1}) \otimes (\vec{a_2} \otimes \vec{b_2}) = \vec{0}$ $\wedge \ [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a_2}, \vec{b_2}] = 0$
$E_1 \parallel E_2 \wedge E_1 \neq E_2$ 	$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \wedge P_1 \notin E_2$	$\vec{n_1} \otimes \vec{n_2} = \vec{0} \wedge$ $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n_2} \neq 0$ $(\vec{a_1} \otimes \vec{b_1}) \otimes (\vec{a_2} \otimes \vec{b_2}) = \vec{0}$ $\wedge \ [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{a_2}, \vec{b_2}] \neq 0$
 $E_1 \times E_2$ egal welcher Winkel	$\vec{n_1} \nparallel \vec{n_2}$	$\vec{n_1} \otimes \vec{n_2} \neq \vec{0}$ . . . . .
$E_1 \perp E_2$ 	$\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$	$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ . . . .

Dez 4-10:51

Bsp:

gegeben: $E1: \ P_1 = (2, 1, 3)$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E2: \ P_2 = (+1, 0, +2)$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Lage von E1 zu E2.

Dez 4-11:01

$E_1 \overset{?}{} E_2$

$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \vec{0}$?

ja: $E_1 \parallel E_2$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}_2 = 0$?

- ja: $E_1 = E_2$
- nein: $E_1 \neq E_2$, $E_1 \parallel E_2$

nein: $E_1 \times E_2$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$?

- ja: $E_1 \perp E_2$
- nein: $E_1 \times E_2$ nicht senkrecht

Bsp.: $\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow E_1 \times E_2$

Dez 4-11:03

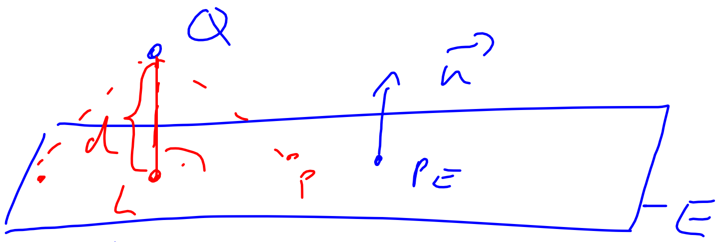
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow E_1 \perp E_2$ (Ergebnis)

3.4.3 Abstände von Punkten, Geraden und Ebenen an Ebenen

Dez 4-11:07

3.4.3.1. Abstand Punkt zu Ebene im $\mathbb{R}^3$



Def.: $d = d(Q,E) = \min\limits_{P \in E} |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{LQ}|$

heißt Abstand von Punkt Q zu Ebene E.

L heißt Lotpunkt.

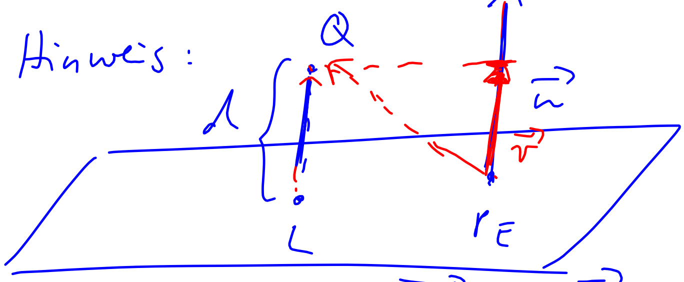
Dez 4-11:09

Satz: Sei $d(Q,E) = |\overrightarrow{LQ}|$ mit $L \in E$. Dann gilt

$$\overrightarrow{LQ} \perp E \quad (\overrightarrow{LQ} \parallel \vec{n})$$

Leiten Sie eine Formel für $d(Q,E)$ her! <u>HA</u>

Hinweis:



$\vec{v}$ = Projektion von $\overrightarrow{P_E Q}$ auf $\vec{n}$

$\Rightarrow |\vec{v}| = d = |\overrightarrow{LQ}|$

Dez 4-11:11

Die korrespondierende Formel steht in folgendem Satz (beweisen Sie den Satz, HA)

Satz: Sei $Q \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt, $E: P_E, \vec{n}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Dann gilt:

(1) $d(Q,E) = |\vec{v}| = \dfrac{|\overrightarrow{P_E Q} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

(2) $L = Q - \underbrace{\dfrac{(\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_E Q})}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}}_{\vec{v}}$ $\quad (\overrightarrow{LQ} = \vec{v})$

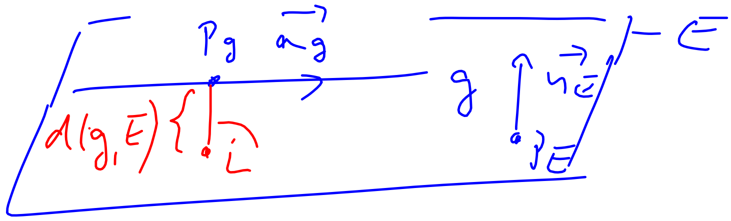
"$Q - L = \vec{v}$

$L = Q - \vec{v}$

Dez 4-11:16

3.4.3.2. Abstand $g \parallel E$

(einer Parallelen Geraden zu einer Ebene) (im $\mathbb{R}^3$)

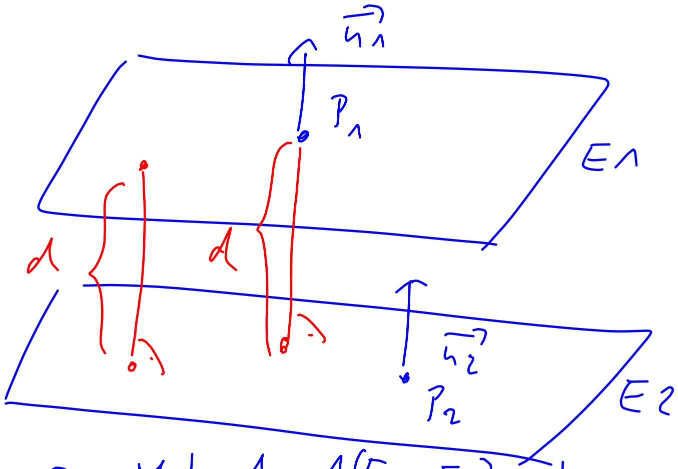


Def: Der Abstand $d(g,E)$ der Geraden g zur Ebene E ist gleich $d(P_g, E) = d(g,E)$

(Vor: $g \parallel E$)

Dez 4-11:19

3.4.3.3. Abstand zweier paralleler Ebenen im $\mathbb{R}^3$



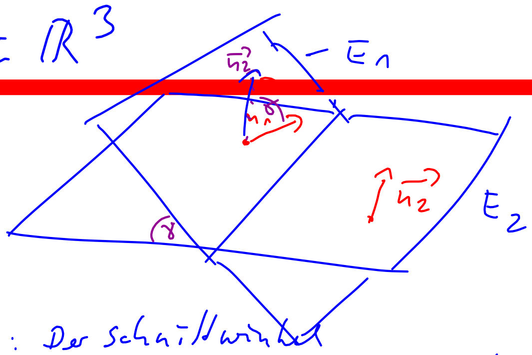
Def: Der Abstand $d(E_1, E_2)$ ist definiert als:

$$d(E_1, E_2) = d(P_1, E_2) = d(P_2, E_1)$$

(Vor: $E_1 \parallel E_2$)

Dez 4-11:22

3.4.3.4. Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen im $\mathbb{R}^3$



Def: Der Schnittwinkel $\gamma = \measuredangle(E_1, E_2)$ ist gleich dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren,
d.h. $\gamma = \measuredangle(E_1, E_2) = \measuredangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

a

Dez 4-11:26