HTW	**Mathematik 1 Lösungen zu Übung2**
	MST

Zu Aufgabe 1

Zu a)
Sei $m\in N$.
Vor.: m sei ungerade
Beh: m^2 ist ungerade
Beweis: (direkt)
Sei m ungerade $\rightarrow$m ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow \exists k\in N: m=2k+1$
$\rightarrow m^2=(2k+1)^2 = 4k^2 +4k + 1 = 2(2k^2+2k) +1 = 2n + 1$ mit $n=2k^2+2k$.
$\rightarrow m^2$ ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow m^2$ ist ungerade!

qed.

Zu b)
Sei $m\in N$
Vor: $m\in N$, m^2 ist ungerade
Beh: m ist ungerade
Beweis: (indirekt)
Sei m nicht ungerade$\rightarrow$ m ist gerade $\rightarrow \exists k\in N: m=2k$
$\rightarrow m^2=(2k)^2 = 4k^2 = 2n$ mit $n=2k^2$.
$\rightarrow m^2$ ist durch 2 teilbar $\rightarrow m^2$ ist nicht ungerade !

qed.

Zu c)
Vor: $a > b$, $a,b \in N$
Beh: $\frac{a-b}{a+b}$ ist unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ ist unkürzbar
Beweis: (indirekt)
Sei $\frac{a}{b}$ kürzbar $\rightarrow \exists k,p,q\in N$: $a = kp$ und $b = kq$ $\rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{k(p-q)}{k(p+q)}$ ist ebenfalls (durch k) kürzbar.

qed.

zu d)
Beh: $\forall n \in N$: $\frac{n^2+1}{n+1} \geq 1$
Beweis: (direkt)

Es gilt: $\frac{n^2+1}{n+1} > 1 \Leftrightarrow n^2+1 \geq n+1 \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$.

Da für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, ist die Behauptung des Satzes (aufgrund der Äquivalenz zur Aussage $n \geq 1$) wahr.

qed.

zu e)

Beh.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis: (Vollst. Induktion)

IA: n=1: LS=1, RS=1 --> LS=RS qed.

IS: Vor.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beh.: $\forall n \in N : \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Bew.:

$$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \underset{zerlegen}{=} \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$\underset{RS \quad der \quad Vor.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\underset{umformen}{=} \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = RS_{Beh.}$$

q.e.d

Zu f) Beh.: $\forall n \in N, n \geq 4 : 2^n \leq n!$

Beweis: (Vollst. Induktion)

IA: n=4: LS=16, RS=24 --> LS ≤ RS qed.

IS: Vor.: $2^n \leq n!$

Beh.: $2^{n+1} \leq (n+1)!$

Bew.:

$$LS_{Beh} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \underset{Vor.}{\leq} n! \cdot 2 \leq n!(n+1) = (n+1)!$$

q.e.d

Zu Aufgabe 2

a) $E = \{n \in N \mid \exists k \in N : n = 3k\}$

b) $Q = \{\frac{n}{m} \mid n \in Z \wedge m \in N\}$

HTW	**Mathematik 1 Lösungen zu Übung2**
	MST

Zu Aufgabe 3

a)

$B \cup C = \{7,14,18,21,24,28,35\}$

$B \cup \overline{C}_D = \{7,14,21,28,35\} \cup \{9,12,15,27,30\} = \{7,9,12,14,15,21,27,28,30,35\}$

$B \setminus C = \{7,14,28,35\}$

A∩D=ϕ={} (leere Menge), B∩C={21}

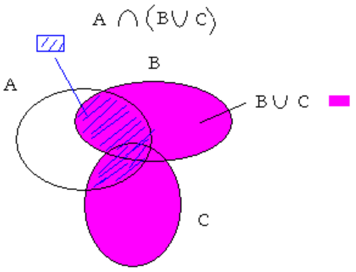
b) Die Potenzmenge -wir schreiben $\wp(A)$ - einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A: $\wp(A) = \{M \mid M \subseteq A\}$.

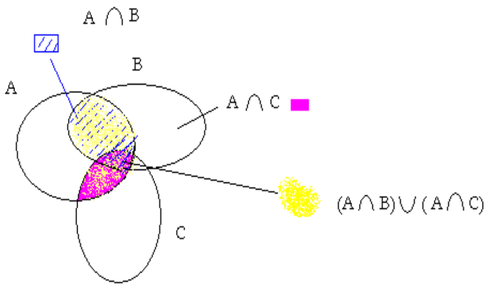
Demzufolge ist: $\wp(C) = \{\emptyset, \{18\}, \{21\}, \{24\}, \{18,21\}\{18,24\}\{21,24\}\{18,21,24\}\}$

c) $|D| = 8$

Zu Aufgabe 4

a)



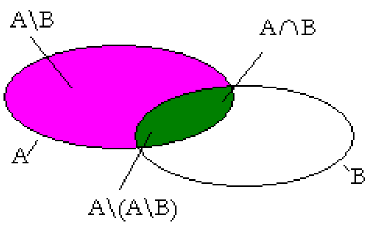


$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b)



Zu Aufgabe 5

a) zu 6 , b) zu 5 , c) zu 2, d) zu 3), e) zu 1, f) zu 4 .

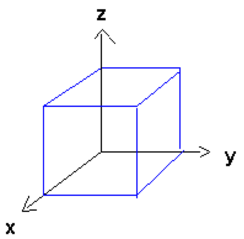
HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

Zu Aufgabe 6

Zu a) A = (A∩B)∪A\B={1,2,4,6}
Zu b) (A∪C)∩B = (A∩B)∪(C∩B)={2,4,6} ∪{2,5}={2,4,5,6}.

Zu Aufgabe 7

a)



3-dimensionale Würfel mit Kantenlänge 1.

b) M=(1,4) = { x∈R|1<x<4}. (offenens Intervall von 1 bs 4).

c)

$$
\begin{aligned}
A\times B = \{ & (2,7),(4,7),(8,7)(16,7)(32,7) \\
& (2,14,)(4,14),(8,14),(16,14)(32,14) \\
& (2,21),(4,21),(8,21)(16,21)(32,21) \\
& (2,28),(4,28),(8,28),(16,28),(32,28), \\
& (2,35),(4,35),(8,35),(16,35),(32,35)\} \\
B\times A = \{ & (7,2),(7,4),(7,8),(7,16),(7,32), \\
& (14,2),(14,4),(14,8),(14,16),(14,32), \\
& \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots \\
& (35,2),(35,4),(35,8),(35,16),(35,32)\}
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe 8

$M = \{x\in Z \mid \exists z\in Z : x = 3z\}$

Es ist $|M| = |N|$ **.**

Begründung: Es ist $|M| = |Z|$ (weil jedes z∈Z eineindeutig durch die Zuordnung x=3z auf x∈M abbildbar ist). Weiterhin haben wir in der Vorlesung gezeigt: |Z|=|N|. Daraus folgt: |M|=|N|.