MST	**Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I** Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizenoperationen

Zu Aufgabe 1:

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= $(2A - 3B)^T \cdot B$

Lösung:
Es ist:

$$(2A - 3B)^T = \left(\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

und folglich:

$$C = (2A - 3B)^T \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -8 & -41 & -27 \\ -7 & -25 & -20 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 2 :

Berechnen Sie die Lösung z des folgenden Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ -4x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Lösung :

Nach CR ist :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4+3+8-(4-2+12)}{-8-4+6-(-2-4+24)} = \frac{7-14}{-6-18} = \frac{7}{24}$$

(Die Determinanten sind das Spatprodukt der 3 Zeilenvektoren und werden mit der Sarussschen Regel berechnet).

Zu Aufgabe 3

Durch folgende 3 Messpunkte (x_i, y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 2. Grades

$$y = ax^2 + bx + c .$$

xi	-1	0	2
yi	0	1	1

MST	Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-c dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels der Cramerschen Regel lösen!

Lösung:

Aus der Beziehung $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, die für jeden der 3 Punkte (xi,yi) gelten muss, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{y}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wir lösen es durch Anwendung der Cramerschen Regel:

Es ist

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+2-1-(0+0-1)}{0+0-4-(0+2+0)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+0+0-(4+1+0)}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+0-4-(0+0+2)}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Das Polynom lautet folglich: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

MST	**Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I** Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Rangbestimmung

Zu Aufgabe 4:
Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen“ an !

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}8\\4\\5\\1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4 & 2\\0 & 2 & 2 & 1\\0 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Lösung:
rg(A)=1 (nur eine Zeile), $rg(B)=1$ (nur eine Spalte),
$rg(C)=3$ (Diagonalform), $rg(D)=4$ (Diagonalform), $rg(E)=2$ (Diagonalform).

Zu Aufgabe 5:

Seien $\vec{a},\vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren ungleich dem 0-Vektor und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl.
Zeigen Sie, dass gilt:

1) $\vec{a}$ und $\overrightarrow{\lambda b}$ sind linear unabhängig
2) $\vec{a}$ und $\vec{b}+\lambda\vec{a}$ sind linear unabhängig.

Lösung:

Zu 1) Sind $\vec{a},\vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren , so sind sie nicht parallel. Da $\overrightarrow{\lambda b}$ die Richtung von $\vec{b}$ höchstens um 180 ° ändert, sind auch $\vec{a}$ und $\overrightarrow{\lambda b}$ nicht parallel und damit linear unabhängig.

Zu 2) Wir zeigen, dass sich der 0-Vektor nur auf triviale Weise erzeugen lässt:

Sei $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2(\vec{b}+\lambda\vec{a})=\vec{0}$.

$$\underset{\substack{sortieren\\nach\\\vec{a}\text{ und }\vec{b}}}{\Rightarrow} (\lambda_1+\lambda_2\lambda)\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\vec{0}.$$

Wegen der Unabhängigkeit von $\vec{a},\vec{b}$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2\lambda&=0 \quad \text{und}\\ \lambda_2&=0\end{aligned}$$
(Der 0-Vektor lässt sich nur auf triviale Weise aus $\vec{a},\vec{b}$ erzeugen).

Setzten wir die 2. Gleichung in die erste ein, so folgt $\lambda_1=0$.

$\Rightarrow \lambda_1=0$ und $\lambda_2=0$.
$\Rightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}+\lambda\vec{a}$ sind linear unabhängig.
q.e.d

Zu Aufgabe 6:

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen!

$$a)A=\begin{pmatrix}2&4&7\\3&2&9\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad b)B=\begin{pmatrix}4&1&2&7\\1&2&4&1\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

<u>Zu a)</u>

$$A=\begin{pmatrix}2&4&7\\3&2&9\\1&2&3\end{pmatrix}\text{Z1 mit Z3 vertauschen}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&9\\2&4&7\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\\ Z2'=Z2-3Z1\\ Z3'=Z3-2Z1\end{matrix}\qquad\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow rg(A)=3$$

<u>Zu b)</u>

$$\begin{pmatrix}4&1&2&7\\1&2&4&1\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix}\text{ Z1 mit Z2 vertauschen}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\4&1&2&7\\2&4&3&2\\7&1&2&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ Z2-4Z1\\ Z3-2Z1\\ Z4-7Z1\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-7&-14&3\\0&0&-5&0\\0&-13&-26&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ -\frac{13}{7}Z2+Z4\end{matrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-7&-14&3\\0&0&-5&0\\0&0&0&-\frac{46}{7}\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg(B)=4}$$

MST	Lösungen zu Übung 9, MST Mathematik I Matrizen, Rang Prof. Dr.B.Grabowski

Zu Aufgabe 7:
Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

<u>**Lösung:**</u>
Schreibt man die Vektoren als Zeilen (!), dann lautet die zu untersuchende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

.Wir bestimmen den Rang von A indem wir die Matrix durch geschickte

Anwendung erlaubter (d.h. den Rang nicht ändernder) Operationen diagonalisieren:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -Z1 \\ \\ -3Z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -Z3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Das heißt, die 4 Vektoren sind nicht linear unabhängig!