MST	Übung 9 Matrizen, Rang,	Mathematik I Prof. Dr.B.Grabowski

Matrizenoperationen

Aufgabe 1:

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix C= $(2A - 3B)^T \cdot B$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösung z des folgenden Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ -4x + 2y + 2z &= 1 \\ x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Durch folgende 3 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 2. Grades

$$y = ax^2 + bx + c .$$

xi	-1	0	2
yi	0	1	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-c dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels der Cramerschen Regel lösen!

Rangbestimmung

Aufgabe 4:
Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E durch „Draufschauen" an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren ungleich dem 0-Vektor und $\lambda \neq 0$ eine reelle Zahl.

Zeigen Sie, dass gilt:

1) $\vec{a}$ und $\overline{\lambda \vec{b}}$ sind linear unabhängig
2) $\vec{a}$ und $\vec{b} + \lambda\vec{a}$ sind linear unabhängig.

D.h., die lineare Unabhängigkeit ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren mit einem Skalar multipliziert und sie ändert sich nicht, wenn man zu einem Vektor das Vielfache des anderen dazu addiert!

(Darüber hinaus ändert sich der Rang nicht, wenn man zwei Vektoren miteinander vertauscht, also einfach in einer anderen Reihenfolge hinschreibt.)

Aufgabe 6:

Der Rang einer Matrix ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren).
Aufgabe 6 zeigt, dass sich der Rang einer Matrix sich nicht verändert, wenn man eine der folgenden Operationen auf die Zeilen (Spalten) der Matrix anwendet:

a) Vertauschung von 2 Zeilen (oder 2 Spalten),
b) Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl λ≠ 0!
c) Addition oder Subtraktion des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte)

Man kann nun den Rang einer beliebigen Matrix bestimmen, indem man sie durch geschickte Anwendung der Operationen a),b), c) in eine solche Diagonalgestalt bringt, dass man den Rang ablesen kann.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ Zeile2 - 3 * Zeile1 \\ Zeile3 - 2 * Zeile1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Zeile3 - Zeile2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Daraus folgt: rg(A) = rg(B) = 2.

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen, indem Sie sie durch geschickte Anwendung der Operationen a),b), c) in eine solche Diagonalgestalt bringen, dass Sie den Rang ablesen können.

$$a)A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7:
Untersuchen Sie, ob folgende 4 Vektoren linear unabhängig sind, indem Sie die Matrix bilden, deren Zeilen aus den 4 Vektoren gebildet werden und den Rang dieser Matrix (durch Diagonalisierung) bestimmen!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$