5 Reproduktions- und Grenzwertsätze

5.1 Reproduktionssätze

Beispiel 50: Der Aufzug in einer Firma ist zugelassen für 12 Personen bzw. 1000 kg. Das Durchschnittsgewicht der Angestellten der Firma ist μ = 80 kg mit σ = 4 kg und ist normalverteilt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 12 Personen mehr als 1000 kg wiegen?

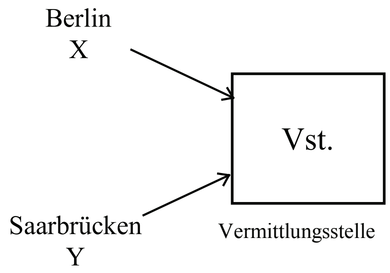
X_i – zufälliges Gewicht von Person i

$X_i \sim N(80, (4)^2)$, i=1,...,12

$X = X_1 + \cdots + X_{12}$

ges.: $P(X > 1000\text{kg})$ $\Rightarrow$ Wir benötigen die Verteilung der Summe von Zufallsgrößen.

Beispiel 51:

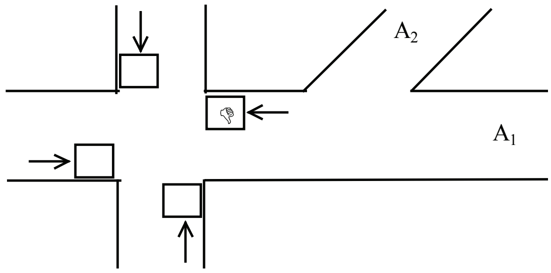


X – Anzahl eintreffender Signale pro μs aus Berlin
Y – Anzahl eintreffender Signale pro μs aus Saarbrücken

Es seien $X \sim P(\lambda_x)$ und $Y \sim P(\lambda_y)$

ges.: Wahrscheinlichkeit dafür, daß $X + Y > c$, c – Kapazität der Vst.
$\rightarrow$ Wir benötigen die Kenntnis der Verteilung von X + Y!

Beispiel 52:



Ankunftsstrom aus Richtung A_1:
X_i – zufällige Anzahl von eintreffenden Autos in aus Richtung

A_i pro min.

Sei $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, $\lambda_i = EX_i$.

Ges.: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtzahl X =X1 +X2 der an der Kreuzung eintreffenden Autos.

Allgemeine Problemstellung: geg.: $\begin{cases} X \sim F_1 \\ Y \sim F_2 \end{cases}$

ges.: X + Y ~ ?

Satz: ***(Reproduktionssatz)***

Seien X und Y zwei ***stochastisch unabhängige*** Zufallsgrößen.
Dann gelten folgende Aussagen:

1.) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

(Typ der Normalverteilung bleibt bei linearen Transformationen erhalten.)

2.) $\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2) \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2)$

3.) $\left.\begin{array}{l} X \sim B(n_1, p) \\ Y \sim B(n_2, p) \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

3.) $\left.\begin{array}{l} X \sim P(\lambda_1) \\ Y \sim P(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

<u>Anwendung:</u> (zum Beispiel 50)

geg.: $X_i \sim N\left(80, (4)^2\right), i = 1,...,12$

ges.: $P(X > 1000)$ mit $X_{ges} = X_1 + \cdots + X_{12}$

Es folgt: $X_{ges} \sim N\left(\underbrace{12 \cdot 80}_{960}, (12) \cdot (4)^2\right)$

Daraus folgt:

$$P\left(X_{ges} > 1000\right) = 1 - P\left(X_{ges} \leq 1000\right) = 1 - F(1000) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 960}{\sqrt{12} \cdot 4}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{40}{\sqrt{192}}\right) = 1 - \Phi(2{,}89) = 1 - 0{,}998 = 0{,}002$$

Achtung: Es gilt nicht: $X_{ges} = X_1 + X_2 + ... + X_{12} = 12\, X_1$!!

Definition : Sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion F(x). Wir bezeichnen $X_1,...,X_n$ als (mathematische) Stichprobe von X, falls gilt:

a) $X_1,..., X_n$ sind gegenseitig stochastisch unabhängig
b) X_i hat die gleiche Verteilung (Verteilungsfunktion F) wie X.

(X_i ist die i.te (zufällige) Beobachtung von X)

	Sei X ~N(μ, σ^2) eine normalverteilte Zufallsgröße und X_1, ...,X_n eine Stichprobe von X. Welche Verteilung besitzt das arithmetische Mittel $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

5.2 Grenzwertsätze

Wir kennen: $\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ p \to \infty \\ n \cdot p = \lambda = const.}]{} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-x}$

$\left(B(n,p) \approx P(n \cdot p)\right)$

Wir können die Binomialverteilung auch durch eine Normalverteilung approximieren:

<u>Satz:</u> ***(Grenzwertsatz von Moivre – Laplace)***

Sei $X \sim B(n,p)$.
Dann gilt:

$$\frac{X - EX}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}$$

ist für $n \to \infty$ Standardnormalverteilt.

<u>Dieser Satz besagt:</u> $Y = \dfrac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \underset{n\text{ groß}}{\approx} N(0,1)$

bzw. (wegen $X = Y \cdot \sqrt{n \cdot p(1-p)} + n \cdot p$ und Reproduktionssatz a))

$$\boxed{X \sim B(n,p) \underset{n\text{ groß}}{\approx} N(n \cdot p, n \cdot p(1-p))}$$

<u>Beispiel 53:</u> Versuch: 600x Würfeln

Gesucht:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anzahl gewürfelter “6” bei 600 Würfeln zwischen 95 und 105 liegt?

Lösung:
Sei X – zufällige Anzahl gewürfelter “6” bei 600 Versuchen.

$$X \sim B\left(n = 600, p = \frac{1}{6}\right)$$

$$P(95 \le X \le 105) = \sum_{i=95}^{105} \binom{600}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{600-i}$$

<u>Verwendung des obigen Satzes:</u>

$\Rightarrow$ Es gilt: $X \approx N\left(600 \cdot \frac{1}{6},\ 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)$

$$\Rightarrow P(95 \le X \le 105) = F_{(105)} - F_{(95)} = \Phi\left(\frac{105-100}{10 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{95-100}{10 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{5}{10\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)-\Phi\left(\frac{-5}{10\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{5}{10\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}}\right)-1$$

$$=2\cdot\Phi(0{,}55)-1$$

$$=2\cdot 0{,}7088-1=\underline{\underline{0{,}417}}$$

Verteilung der relativen Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A:

Sei A ein Ereignis mit der Eintrittswahrscheinlichkeit p:=P(A) und X das Ergebnis des zufälligen Versuchs V in welchem das Eintreten von A beobachtet wird:

$$X=\begin{cases}1 & A \quad tritt \quad ein \quad p\\ 0 & A \quad tritt \quad nicht \quad ein \quad 1-p\end{cases}$$

Sei X_i , i=1,...,n, eine Stichprobe von X. Dann gilt offensichtlich: $h_n(A)=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$.

Wie ist $h_n(A)$ verteilt?

Aus dem Satz von Moivre-Laplace folgt:

$$nh_n(A)=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim B(n,p)\approx N(np,np(1-p)) .$$

Aus dem Reproduktionssatz ergibt sich dann:

$$h_n(A)\approx N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right) .$$

	Sei W Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n= 150 Beobachtungen $h_n(A)$ von der Wahrscheinlichkeit p=P(A) um nicht mehr als 0,01 abweicht. a) Geben Sie unter Verwendung der Abschätzung : $p(1-p)\leq ¼$ für alle $p\in[0,1]$ eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit W an! b) Wie viele Versuche muß man mindestens durchführen (d.h., wie groß muß n mindestens sein), um P(A) durch die relative Häufigkeit $h_n(A)$ mit mindestens 99 % iger Sicherheit mit einer Abweichung von höchstens $\pm$ 0,002 genau zu schätzen ?