Übungsaufgabe:

Beispiel: Die Hochbegabung von Kindern einer bestimmten Alterstufe wird mit zwei Testverfahren ermittelt. bestehen die Kinder beide Tests, so werden sie als hochbegabt eingestuft. Es sei bekannt, dass 1 % der Kinder der 97,5% betrachteten Altersstufe Test 1 (T1) besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind den zweiten Test (T2) besteht, ist 0,02. Insgesamt bestehen 99% weder den ersten noch den zweiten Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kind als hochbegabt eingestuft?

$P(T1 \cap T2) - ?$

$P(T1) = 1\% = 0{,}01$

$P(T2) = 2\% = 0{,}02$

$P(\overline{T1 \cup T2}) = 97{,}5\% = 0{,}975$

$P(T1 \cap T2)$

$$\underline{P(T1 \cup T2)} = P(T1) + P(T2) - \underline{P(T1 \cap T2)}$$

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1 \cup T_2) - P(T_1) + P(T_2) =$$

$$= -1 + P(\overline{T_1 \cup T_2}) + P(T_1) + P(T_2) =$$

$$= -(1 - 0{,}97) + 0{,}01 + 0{,}02 =$$

$$1{,}05$$

$$= 1 - \cancel{0{,}95} = 0{,}05$$

Übungsaufgabe:

1.12 * Bei der Herstellung eines Produktes treten 2 Fehler F1="nicht maßhaltig" und F2="nicht funktionsfähig" mit den Wahrscheinlichkeiten P(F1)=0,01 und P(F2)=0,02 ein. Mit mindestens einem Fehler behaftet sind insgesamt 0,5 % aller Produkte. Ein Produkt ist nur dann verkäuflich, wenn es keinen der beiden Fehler besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt verkäuflich?

Übungsaufgabe:

1.13 * In deutschsprachlichen e-mails tritt das Wort „Viagra“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 auf. Das Wort „Rolex“ tritt in 2 % aller Fälle auf. Mit mindestens einem dieser beiden Worte sind 2,5 % aller e-mails behaftet. Eine e-mail wird nur dann nicht als spamverdächtig klassifiziert, wenn sie keines der beiden Worte enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine e-mail nicht als spamverdächtig eingestuft?

Wo bekommen wir diese gegebenen Wahrscheinlichkeiten her?

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- in Glücksspielen oder Laplace-Versuchen:
  Wahrscheinlichkeiten können exakt als Chance des Eintretens von A bei Durchführung von V ermittelt werden

- die Wahrscheinlichkeit P(A) kann mit Hilfe der beobachteten relativen Häufigkeit $h_n(A)$ abgeschätzt werden:

  -> Stabilität der relativen Häufigkeit

Es gilt: $\mathit{stoch}\lim\limits_{n->\infty} h_n(A) = P(A)$ (Stochastische Grenzwertbegriff)

- P(A) = 1/6

Wahrs. mit einem Wurf eine 6 zu werfen

-> P(A) die Chance, bei einer Versuchsdurchführung Ereignis A zu erreichen.

- P(A) = 1/6 ~ 0,167 bedeutet auch,

bei n-maliger Wiederholung ist der

-> P(A) "Erfolgsanteil" 16,7%

Umgekehrt liefert eine beobachtete relative Häufigkeit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses. Je größer dabei n ist, desto genauer ist dieser Schätzwert für P(A).

Klassische Wahrscheinlichkeit

Laplace-Versuch

* Alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich
* Endlich viele Mögliche Versuchsausgänge

→ bei Glücksspiele

z.B. Würfel:

$P(\text{"}6\text{"}) = 1/6$ $P(\text{"}1\text{"}) = 1/6$

$P(\text{"}2\text{"}) = 1/6$

Def.: Sei V ein zufälliger Versuch. Wenn für die Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ aller Elementarereignisse gilt:

1. $|\Omega| = m < \infty$ $(\Omega = \text{endlich})$ $P(\Omega)=1$
2. $P(\{\omega_i\}) = p \; \forall i = 1 \ldots m$ (alle $\{\omega_i\}$ sind gleichwahrscheinlich)

$p \cdot m = 1 \Rightarrow p = P(\{\omega_i\}) = 1/m$

dann heißt V *Laplace-Versuch*. (Laplace-Versuche: typisch für Glücksspiele)

Satz: Sei V ein Laplace-Versuch, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ und sei $A \subseteq \Omega$ mit $A = \{\omega_{i1}, \ldots \omega_{il}\}$ $(i, j \in \{1, \ldots, m\})$. Dann gilt:

1. $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m} \forall i = 1, \ldots, m$
2. $P(A) = l : m = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (Chance für das Eintreten von A)

klassische WS

Bsp: $A =$ "gerade Zahl" $= \{2, 4, 6\}$

$|A| = 3$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}; \; |\Omega| = 6$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bsp.:

Spielregeln:
- Ziehen einer zufälligen Zahl zwischen 1 und 50 (inkl.)
- Einsatz: 5€
- "Ist die zahl durch 6 oder 8 teilbar", so gewinnt man 20€

Frage: B
Würden Sie dieses Spiel spielen?

$$|\Omega| = 50$$

$$A_8 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$$

nicht disjunkt

$$A_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

$$B = A_8 \cup A_6 = \{8, 12, 16, 18, \underline{24}, 30, 32, \ldots\}$$

$$|B| = 12$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{50} = 0{,}24 \rightarrow 24\%$$

$$P(B) = P(A_8 \cup A_6) = P(A_8) + P(A_6) - P(A_8 \cap A_6) =$$

$$= \frac{|A_8|}{|\Omega|} + \frac{|A_6|}{|\Omega|} - \frac{|A_8 \cap A_6|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{6+8-2}{50} = \frac{12}{50} \longrightarrow 24\%$$

Pro Spiel: 24% von 20€ = 4,8€
Einsatz: 5€
Verlust pro Spiel 0,2€

Kombinatorik

Bsp.:

V=Werfen mit 2 Würfeln. (w_1, w_2)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

a) Genau eine Sechs wird geworfen?
b) Mindestens eine Sechs wird geworfen?
c) Höchstens eine Sechs wird geworfen?

$|\Omega| = ?$

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \ldots (2,6), \ldots (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}$$

A, B $\quad A \times B = \{(a,b),\ a \in A,\ b \in B\}$

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega_2$$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$$

$$A = \{(1,6) \ldots\ldots (5,6),(6,5),\ldots (6,1)\}$$

$$|A| = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{36}$$

$$B = A \cup \{(6,6)\}$$

$$|B| = 11$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$C = \Omega \setminus \bar{C} = \Omega \setminus \{(6,6)\}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{35}{36}$$

Bsp.:

Ein Los von 200 LED’s enthält 120 rote und 80 grüne LED’s. Von den roten LED’s haben die Hälfte eine dreieckige Form, die anderen sind rund. Insgesamt gibt es 110 dreieckige LED’s unter allen 200 Stück. Aus dem Los der 200 LED’s wird zufällig eine (zur Qualitätskontrolle) herausgezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) dass sie rot ist,
b) dass sie eine runde rote oder eine grüne ist,
c) dass sie grün ist,
d) dass sie grün und dreieckig ist.

	rot	grün	
○	60	30	90
△	60	50	110
	120	80	200

$$P(\text{"rot"}) = \frac{120}{200} =$$

$$P(\text{"rot/rund oder grün"}) =$$

$$= P(\text{"rot/rund"} \cup \text{"grün"}) =$$

$$= P(\text{"rot/rund"}) + P(\text{"grün"}) -$$

$$- \underbrace{P(\text{"rot/rund"} \cap \text{"grün"})}_{=0} =$$

$$= \frac{60}{200} + \frac{80}{200} - 0 = \frac{140}{200}$$

$$P(\text{"grün"}) = \frac{80}{200}$$

$$P(\text{"grün}/\Delta\text{"}) = \frac{50}{200}$$

Bsp.:

6-stellige Zahl: $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6$ mit $z_i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$

Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, diese Zahl zu erraten?

$z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$

$|A| = 1$

$$\begin{array}{cccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^6$

$P(A) = 1/9^6$

Im. Alg.:

n Elemente — 9 Ziffern

k Plätze — 6 Plätze

mit Reihenfolge — $123456 \neq 6123 \ldots$

mit Wiederholung (mit Zurücklegen) — 9^6

:

n^k Möglichkeiten

Bsp.:

6-stellige Zahl: $z_1z_2z_3z_4z_5z_6$ mit $z_i \in \{1,2,\dots,9\}$
und $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$

Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, diese Zahl zu erraten?

n Elemente
k Plätze
mit Reihenfolge
ohne Wiederholung

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

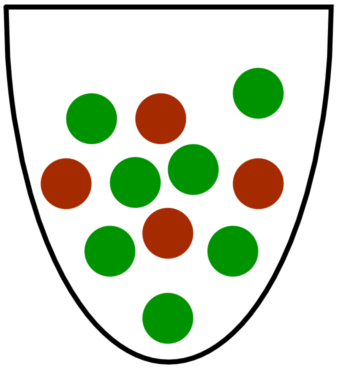
"Arrangierungen"

$z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6$

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{(9-6)!}$$

$$A_6^9 = \frac{9!}{(9-6)!}$$

Bsp.:



3 Kugeln

(r, r, g)
(r, g, r)
(g, r, r)

{r, r, g}

mit Reihenfolge

Ohne Reihenfolge

Ohne Reihenfolge

Ohne Wiederholung

n Elemente

k Plätze

"Kombinationen":

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

"Binomialkoeffizient"

Wieviele Sitzordnungen hat man, wenn 8 Studenten an 8 Comps arbeiten sollen?

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$$

$P_8 = 8!$ "Permutationen"

$$\boxed{P_n = n!}$$

Eigenschaften der kombinat. Zahlen:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = P_k \cdot C_n^k$$

Bsp: 8 Studenten

5 versch. Geräte

5 aus 8 : $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!}$

Die Studenten, die mit den Geräten arbeiten.

Pro 5er-Gruppe: 5! Zuordnungen „Student-Gerät"

\# Möglichkeiten, 5 Geräte zu bedienen, wenn es 8 Studenten zur Verf. stehen:

$$\binom{8}{5} \cdot 5! = \frac{8!}{3!\,\cancel{5!}} \cdot \cancel{5!} =$$

$$C_8^5 \cdot P_5$$

$$= \frac{8!}{(8-5)!} = A_8^5$$

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k$$

Eigenschaften der Kombinationen:

$$\boxed{0! = 1}$$

$$C_n^n = 1 = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$$

$$C_n^0 = 1 \qquad \frac{n!}{(n-0)!\,(n-n)!} = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

Aufgabe

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es fünf Personen in einer Reihe zu platzieren?

b) Vier Freunde schreiben sich gegenseitig Postkarten. Wie viele Postkarten muss die Post befördern?

c) In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann man 4 Flaschen Pils, 3 Flaschen Alt, 2 Wodka und 1 Doppelkorn trinken?

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Zahlenlotto 6 aus 49?

e) Wie viele Möglichkeiten des Zahlenlottos enthalten die Zahl 17?

f) Ein Mechaniker soll 8 Drähte mit 8 Anschlüssen verbinden. Wie oft muss er im schlechtesten Fall probieren? Wie viele Tage wäre er beschäftigt, wenn er für eine Verbindung durchschnittlich 15 Sekunden benötigt?

Aufgabe

Aus einem zufällig gemischten Kartenstapel mit 52 Karten (4 Farben zu je 13 Karten: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,Bube,Dame,König,Ass) werden drei Karten an einen Spieler gegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

a) Es sind 2 Buben.

b) Es sind 2 Könige und 1 Dame.

c) Es sind keine 10er und keine Buben.

Aufgabe

Bei der ersten Ziehung der Glücksspirale 1971 wurde für die Ermittlung einer 7-stelligen Gewinnzahl aus einer Trommel, die je 7 Kugeln mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ enthält, nacheinander rein zufällig 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Welche 7-stelligen Gewinnzahlen hatten hierbei die größte und die kleinste Ziehungswahrscheinlichkeit, und wie groß sind diese Wahrscheinlichkeiten?

b) Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Zahl 3143643.

c) Wie würden Sie den Ziehungsmodus abändern, um allen Gewinnzahlen die gleiche Ziehungswahrscheinlichkeit zu sichern?

Aufgabe

Murphys Gesetz besagt: "Was schief gehen kann, geht in der Regel auch schief." Von Ihren zehn Paar Socken verschwinden sechs einzelne Socken auf mysteriöse Art und Weise. Welches der beiden folgenden Szenarien ist wahrscheinlicher?

- *Glück gehabt:* Es bleiben sieben komplette Sockenpaare.
- *Pech gehabt:* Es bleiben vier komplette Sockenpaare übrig.