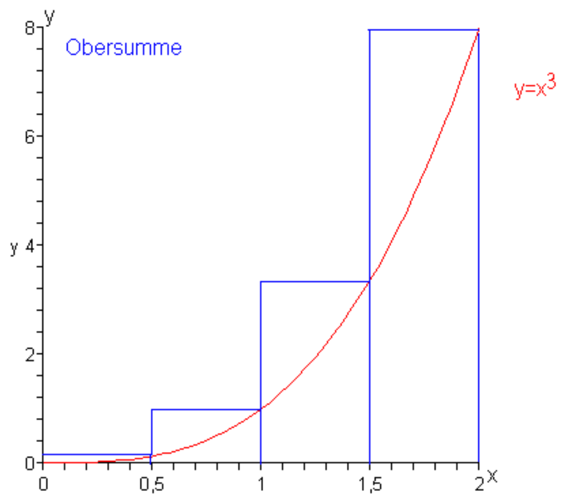
Prof. Dr.B.Grabowski
e-mail:grabowski@htw-saarland.de

Zu Aufgabe 1)
Wird in der Übung besprochen.

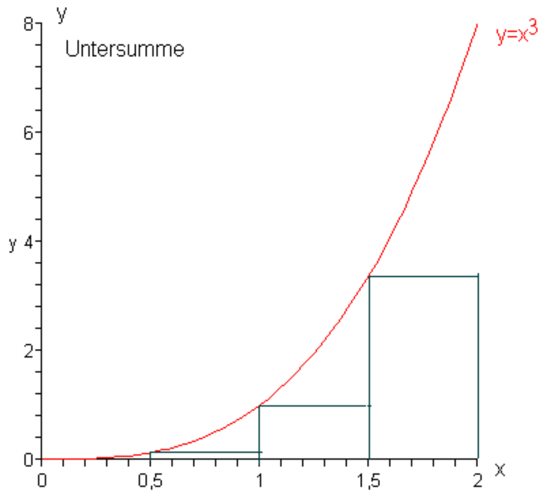
Zu Aufgabe 2)
Wird in der Übung besprochen

Zu Aufgabe 3)



Intervallbreite bei n Intervallen: h = (2-0)/n = 2/n
xo = o, xn=2
xi=i*h = 2*i/n,   i=0,...,n

Flächeninhalt eines Balkens: Ai = h*f(xi)



Intervallbreite bei n Teilintervallen: h = 2/n
xo=0, xn=2
xi = 2*i/n   i=0,...,n

Flächeninhalt eines Balkens: Ai = h*f(x_{i-1})

Obersumme:

$$\overline{A}_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot (2\frac{i}{n})^3 = \frac{2^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$
$$= \frac{16}{n^4} \left(\frac{n^2 (n+1)^2}{4} \right)$$
$$= \frac{4(n^4 + 2n^3 + n^2)}{n^4}$$
$$= \frac{4(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

Untersumme:

$$\underline{A}_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot (2\frac{(i-1)}{n})^3 = \frac{2^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3$$
$$= \frac{16}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{16}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i^3$$
$$= \frac{16}{n^4} \left(\frac{(n-1)^2 n^2}{4} \right)$$
$$= \frac{4(n^4 - 2n^3 + n^2)}{n^4}$$
$$= \frac{4(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

Berechnung des bestimmten Integrals über die Stammfunktion:

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} 2^4 = \frac{16}{4} = 4 .$$

Damit sind alle 3 Ergebnisse gleich, es gilt:

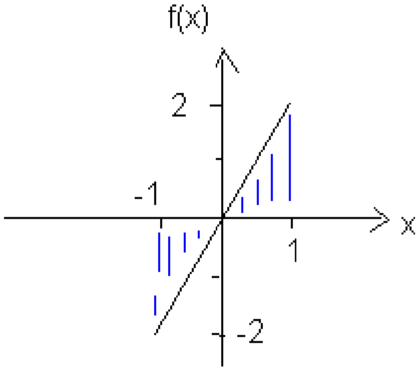
$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \underset{--(n)}{A} = \int_0^2 x^3 dx = 4$$

Zu Aufgabe 4)

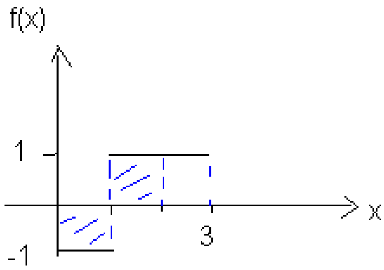
Wird in der Übung besprochen

Zu Aufgabe´5)

a1)



a2)



Zu b1)

Die blau schraffierten Flächen heben sich auf. Hypothese: $\int_{-1}^{1} 2x dx = 0$

Zu b2)

Die blau schraffierten Flächen heben sich auf. Hypothese: $\int_0^3 f(x)dx$ = weiße Fläche = (3-2)*1 = 1

Zu c1)

$$\int_{-1}^{1} 2xdx = \left[x^2\right]_{-1}^{1} = 1^2 - (-1)^2 = 0$$ (Hypothese stimmt)

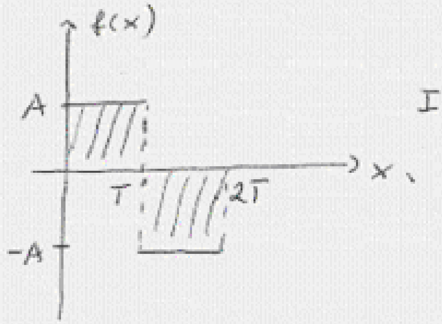
Zu c2)

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \int_0^1 (-1)dx + \int_1^3 1dx = [-x]_0^1 + [x]_1^3 = (-1-(-0)) + (3-1) = 1$$

(Hypothese stimmt)

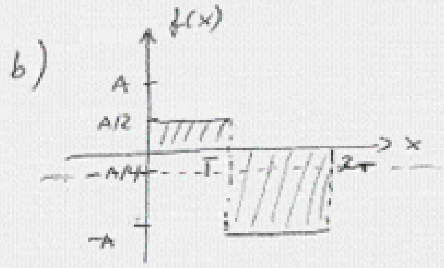
Zu Aufgabe 6)

a)



$I = 0$ (da die Summe aller Funktionswerte in $[0, 2T]$ gleich 0 ist)

b)

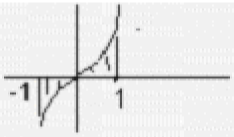


$$I = \frac{\text{Summe aller Funktionswerte}}{2T}$$

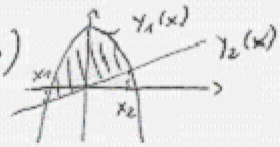
$$= -\frac{\frac{A}{2} \cdot T}{2T} = \underline{\underline{-\frac{A}{4}}}$$

(Das ist so etwas wie der Flächenschwerpunkt)

Zu Aufgabe 7)

a)


A= 1/2

b)


$$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_1(x) - y_2(x))\,dx \doteq 10{,}91$$

$x_1 = -2{,}27$, $x_2 = 1{,}77$

Wenn das zu kompliziert ist, dann rechne mit $y_1(x) = -x^2+3$ und $y_2(x) = 2x$. In diesem Fall lautet das Ergebnis: $A = 10\frac{2}{3} = \frac{32}{3}$.

c) Wird in der nächsten Mathe-Veranstaltung besprochen!
Lösung: a = 3

Zu Aufgabe 8)

Wird in der Übung besprochen!

Zu Aufgabe 9)

Wir verwenden für alle Aufgaben die Formel der Partiellen Integration :
(Abkürzung: u = f(x), v' = g'(x))

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \quad \text{bzw.} \quad \int uv' = uv - \int u'v$$

Damit erhalten wir folgende Lösungen:

a) u=x+3, $v' = x^2-1$

$\rightarrow$ u'=1 und $v = \frac{1}{3}x^3 - x$ und wir erhalten:

$$\int (x^2-1)(x+3)dx = (x+3)(\frac{1}{3}x^3 - x) - \int (\frac{1}{3}x^3 - x)dx = (x+3)(\frac{1}{3}x^3 - x) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C, C \in R.$$

b) $u = (x+3), v' = e^{-3x}$

$\rightarrow$ u'=1 und v=$-\frac{1}{3}e^{-3x}$ und wir erhalten:

$$\int_1^3 (x+3)e^{-3x}dx = [(x+3)(-\frac{1}{3})e^{-3x}]_1^3 + \frac{1}{3}\int_1^3 e^{-3x}dx = \frac{13}{9}e^{-3} - \frac{19}{9}e^{-9}$$

c) u = ln(x), v' = 1 $\rightarrow$ u' = 1/x, v=x und wir erhalten:

$$\int \ln(x)dx = \int \ln(x)\cdot 1dx = x\ln(x) - \int 1dx = x(\ln(x)-1) + C, C \in R.$$

d) u=sin(x), v' = sin(x) $\rightarrow$ u'=cos(x) und v=-cos(x). Wir erhalten:

$$\int \sin^2(x)dx = \int \sin(x)\sin(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx \underset{\cos^2=1-\sin^2}{=} -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx$$

$$\Leftrightarrow\ 2\int \sin^2(x)dx = x - \sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \int \sin^2(x)dx = \frac{(x-\sin(x)\cos(x))}{2} + C, C \in R.$$

Zu e) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \left[\frac{(x-\sin(x)\cos(x)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$.

Zu f) Ergebnis=0.

Zu Aufgabe 10)

Zu a) Substitution: u=2x-3 $\rightarrow$ dx = $\frac{1}{2}du$

I = $\int e^{(2x-3)}dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x-3} + C, C \in R$

Zu b) Substitution: u=cos(x) $\rightarrow$ dx=-sin(x)du

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \quad = \quad -\int \frac{1}{u}du = -\ln(|u|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C, C \in R$$

Zu c)
Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral :

Substitution: u=sin(x) $\rightarrow$ dx= $\frac{1}{\cos(x)}du$,

$$\rightarrow \int \sin(x)\cos(x)dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + C \underset{Rücksubst.}{=} \frac{1}{2}\sin^2(x) + C, C \in R.$$

Nun berechnen wir das bestimmte Integral :

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Anderer Lösungsweg: (Wir substituieren die Integralgrenzen gleich mit:)

Substitution: u=sin(x) $\rightarrow$ dx= $\frac{1}{\cos(x)}du$, es ist : x: 0 $\rightarrow$2π und folglich:

u: 0 $\rightarrow$0

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \int_0^0 u du = \frac{1}{2}\left[u^2\right]_0^0 = 0$$

Zu d) Substitution: $u = 2x^2 + 3x - 13 \rightarrow$ dx= $\frac{1}{4x+3}du$, x: 0 $\rightarrow$1

u: -13 $\rightarrow$-8

$$\int_0^1 \frac{8x+6}{2x^2+3x-13}dx = 2\int_{-13}^{-8} \frac{1}{u}du = 2\left[\ln(|u|)\right]_{-13}^{-8} = 2\ln(\frac{8}{13})$$

Zu e) Substitution: u = x^2+1 $\rightarrow$ $dx = \frac{1}{2}du$ und wir erhalten:

$$\int \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(|u|) + C = \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + C, C \in R.$$

Achtung: Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert. Deshalb schreibt man:

für die Stammfunktionen von 1/u: log(|u|)+C statt log(u)+C).