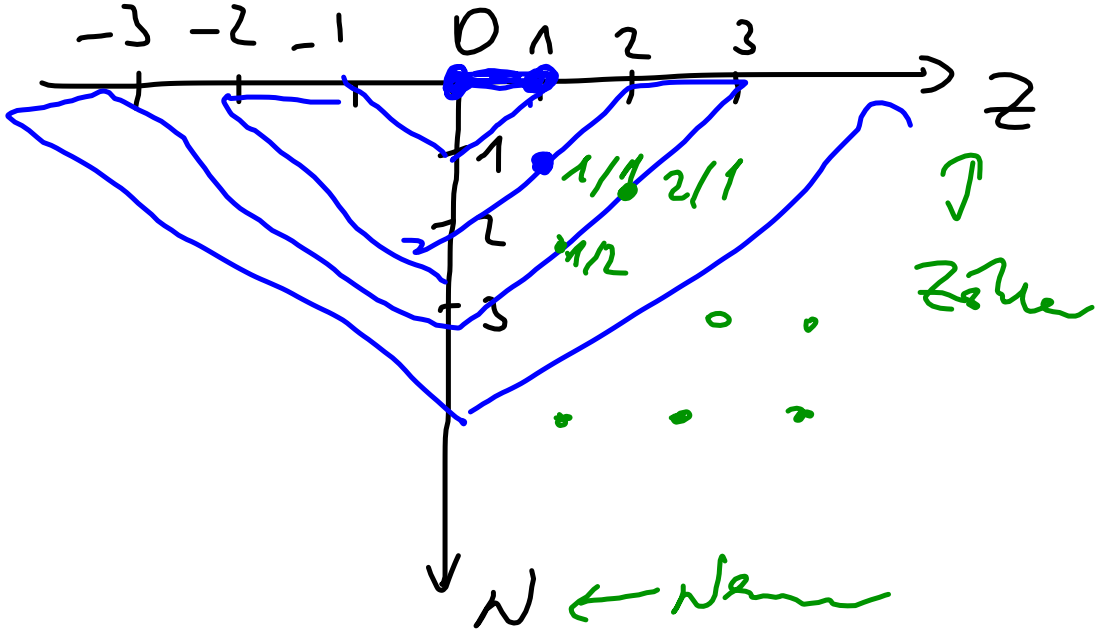
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$



$|\mathbb{Q}| = \text{abzählbar } \infty$

$+, -, *, /, <, >, =, \wedge$

$x^2 = 2 \iff x = 2^{\frac{1}{2}}$

$2 \in \mathbb{Q},\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ = Brüche, endliche oder periodische dezimale Zahlen

$\frac{2}{3} = 0,6\bar{6}$

$\frac{1}{5} = 0,2$

$\sqrt{2}$ weder periodisch noch endlich

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots \notin \mathbb{Q}$

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$+, -, /, *, >, <, =, \hat{}, \sqrt[k]{x}, \log_a x$

$$x^n = a$$

Gegeben:		Gesucht:
x, n	Potenz, ^	$a = x^n$
a, n	$\sqrt[n]{a} = x$	x
x, a	$n = \log_x a$	n

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

$|\mathbb{R}|$ überabzählbar ∞

$(0,1) \subset \mathbb{R}$ ist überabz. ∞

beliebige Folge aus $(0,1)$

$0, z_{11} z_{12} z_{13} \ldots = z_1$

$0, z_{21} z_{22} z_{23} \ldots = z_2$

$\ldots$

$0, z_{k1} z_{k2} z_{k3} \ldots = z_k$

z_{ki} – Ziffer $\in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

$z = 0, \tilde{z}_{11} \tilde{z}_{22} \tilde{z}_{33} \ldots \tilde{z}_{kk}$

$$\tilde{z}_{ii} = \begin{cases} 4, & z_{ii} = 5 \\ 5 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow z \neq z_1$, weil $\widetilde{z_{11}} \neq z_{11}$

- - - -

$z \neq z_k$, weil $\widetilde{z_{kk}} \neq z_{kk}$

- - - - - -

$\Rightarrow$ z gehört nicht der Folge !

$\Rightarrow$ z ist nicht durchnummer. Folge wer beliebig

$\Rightarrow (0,1)$ ist nicht durchnummerierbar $\Rightarrow$ Widerspruch ⚡

$\Rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \cup \{i\}$

$\not{4}, \not{\beta}$

$|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$

2.1. Einführung in die Fourier-Analyse:

→ Analyse
Synthese
Übertragung
} von (zeitabhängigen) Signalen

Wir werden sehen:

fast alle zeitabhängige Signale (Funktionen $f(t)$)

Lassen sich als Überlagerung

∞-vieler (i.A.) Schwingungen

darstellen.

$$A(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \Psi) =$$

$$= A_1(\omega) \sin(\omega t) + A_2(\omega) \cdot \cos(\omega t)$$

diese Form wird bei der FA verwendet

Aufzählung:

(1) M endlich $|M| = n \in \mathbb{N}$

$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$

$\sum_{k=1}^{n} m_k$ — "Summe"

(2) $|M| = \infty$ abzählbar

$M = \{m_1, m_2, \dots\dots, m_k, \dots\dots\}$

$\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ — "Reihe", "unendliche Summe"

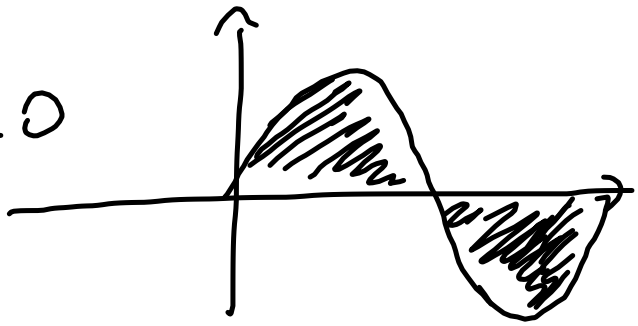
(3) $|M| = \infty$, überabzählbar

z.B. $M = \mathbb{R}$

$$\int_{x \in M} x \, dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ "Summe über $f(x)$-Werte für x zwischen a und b"

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$



Also:

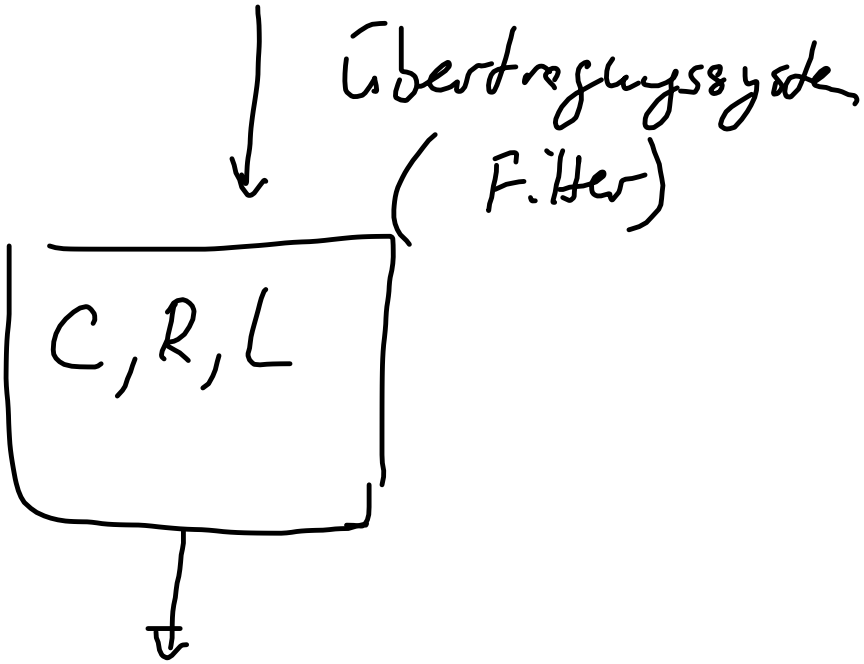
$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left[A_1(\omega) \sin(\omega t) + A_2(\omega) \cdot \cos(\omega t) \right] d\omega$$

Analyse: Untersuchen, wie groß und für jede Frequenz ω die Amplituden $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, d.h. welche Frequ. (Schwingungen) Anteil auf $f(t)$ einen größeren Einfl.

Synthese: Erzeugung von Signalen durch Schwingungen

Übertragung:

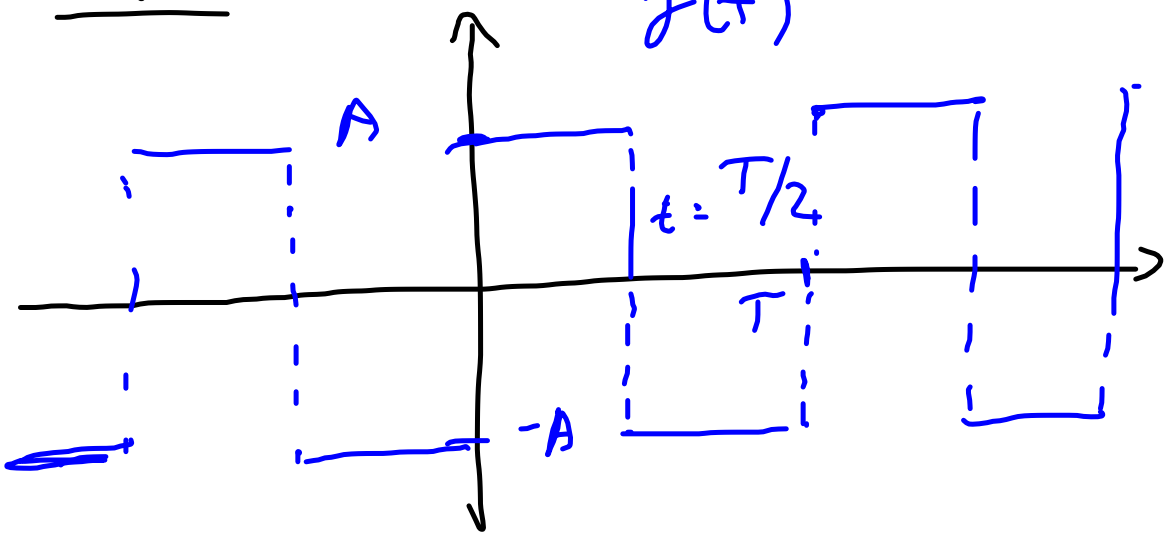
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(\omega)\sin(\omega t) + A_2(\omega)\cos(\omega t)]\, d\omega$$



- Was wird durchgelassen?
- Filter - design?

Wir werden mit den periodischen Signalen $f(t)$ beginnen.

Bsp:



T ist die Periode

$$f(t+Tk) = f(t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Früher:

$f(t)$, beliebig oft stetig diffbar im $(x_0 = t_0)$

Entwicklung als Taylor-Reihe:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k$$

Jetzt:

Entwicklung einer periodischen Fkt $f(t)$ in eine

Fourier - Reihe:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n \omega_0) + b_n \sin(n \omega_0) \right]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T \text{ Periode}$$

"Grundfrequenz".

a_0, a_n, b_n sind zu bestimmen!

$\longrightarrow$ weiter am Do.

2.2. Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe

Satz:

Sei $f(t)$ eine periodische $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion mit der Periode T; d.h.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Grundfrequenz (= Anzahl der "Schwingungen" in Intervall der Länge 2π).

$f(t)$ erfülle folgende Bedingung:

Dirichlet - Bedingungen

Dirichlet

D1: Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(t)$ monoton und stetig ist (endlich viele Unstetigkeitsstellen)

D2: In den Unstetigkeitsstellen existiert sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert (endlich) (keine Polstelle in einem Periodenintervall)

Das gilt:

(1)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

(*) Schwingung

wobei:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t)\,dt = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot 1 \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot \cos(0 \cdot \omega_0 t)\,dt$$

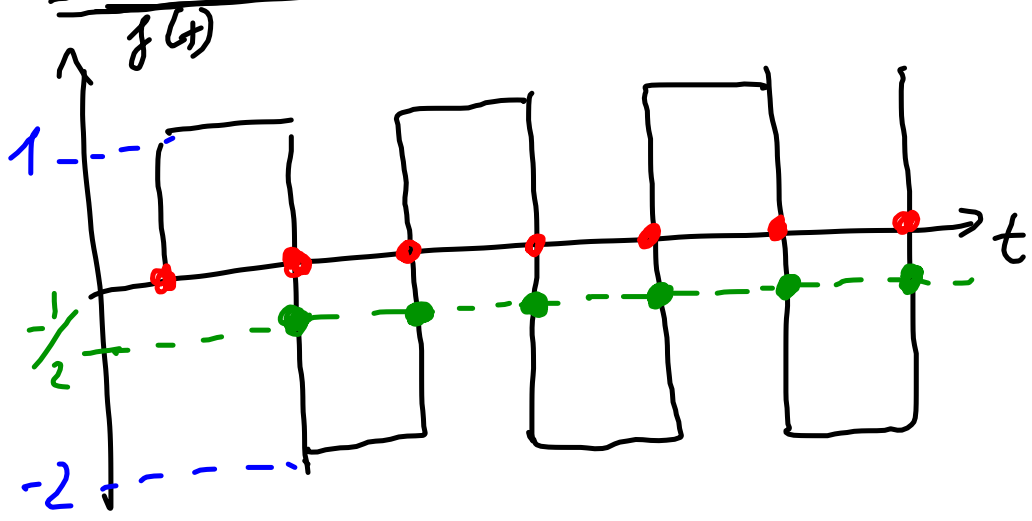
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt \,,$$

$n \geq 1$

und zwar in allen Stellen t, in denen $f(t)$ stetig ist.

(2) In der Unstetigkeitsstelle von $f(t)$ ist die rechte Seite von $(*)$ identisch dem arithmetischen Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert an dieser Stelle.



Bezeichnungen:

(a) $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$

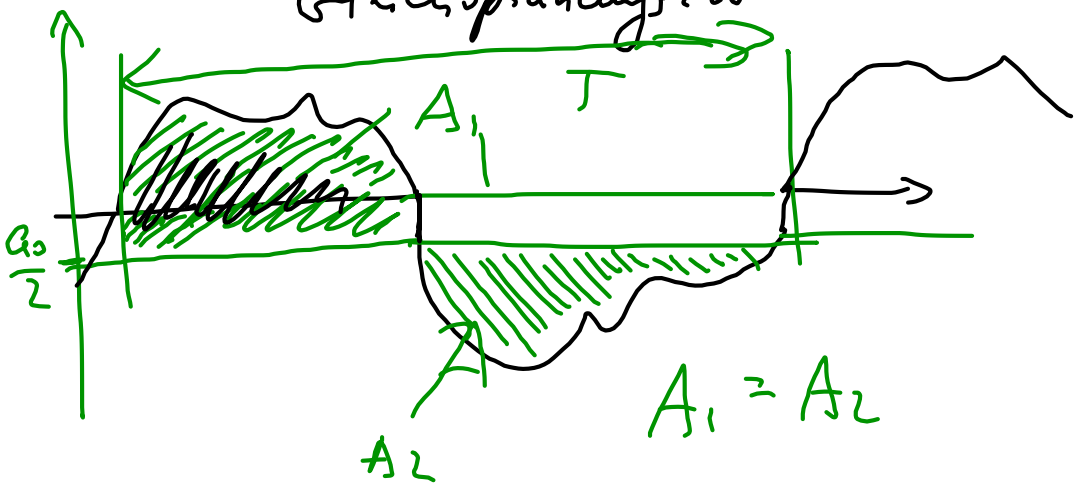
Fourier-Reihe von $f(t)$

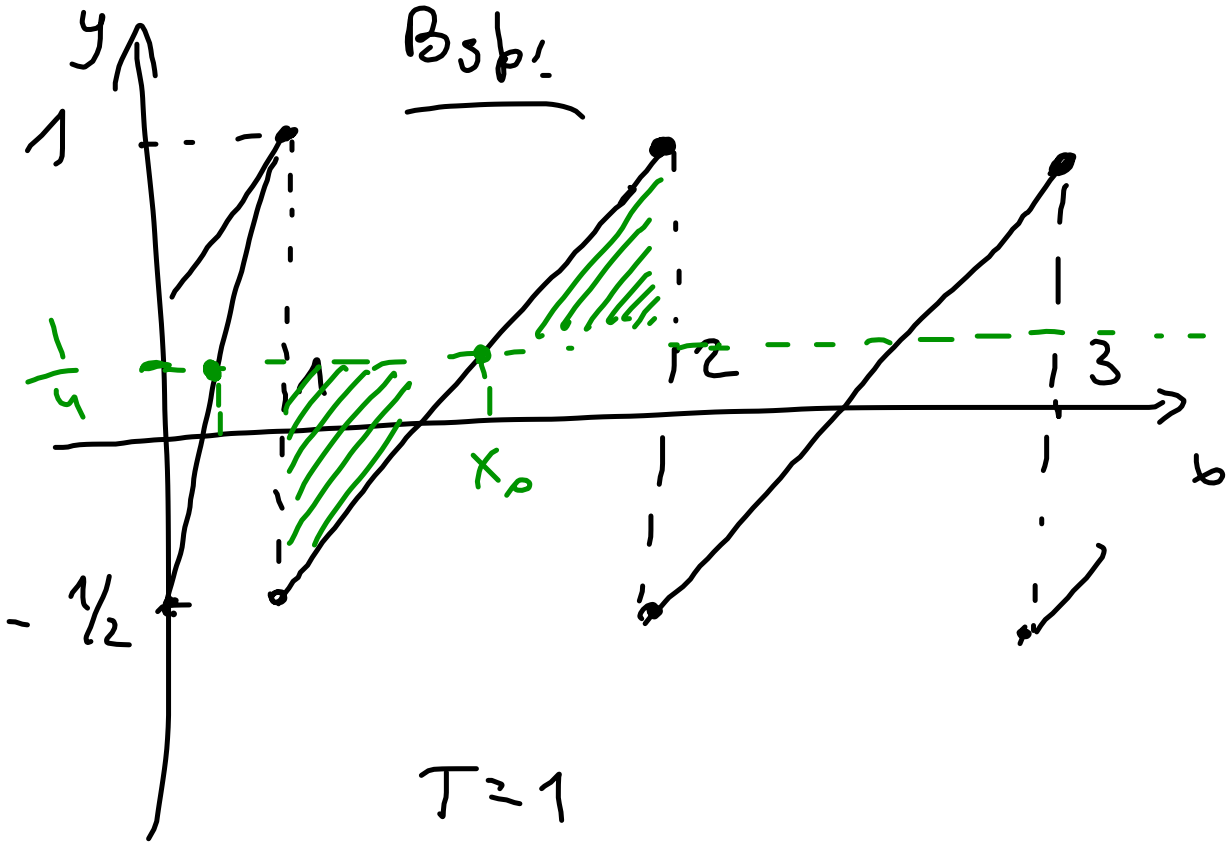
(b) $\frac{a_0}{2}$: "Offset" =

= "lineres Mittel von $f(t)$ über (T)" =

= "Schwerpunktlinie von $f(t)$ über (T)" =

= "Gleichspannungsanteil"





$T = 1$

$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, \quad \underbrace{t \in [0,1)}_{(T)}$$

$$f(t+1) = f(t)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1} \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}$$

$[1,2)$:

x_0 - ? Schnittpunkt von dem Funktionsgraf und der Linie $y = \frac{a_0}{2}$

$f(t + Tk) = f(t)$

$[1, 2) \longrightarrow k = 1$

$f(t)$ auf $(0, 1)$:

$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t$

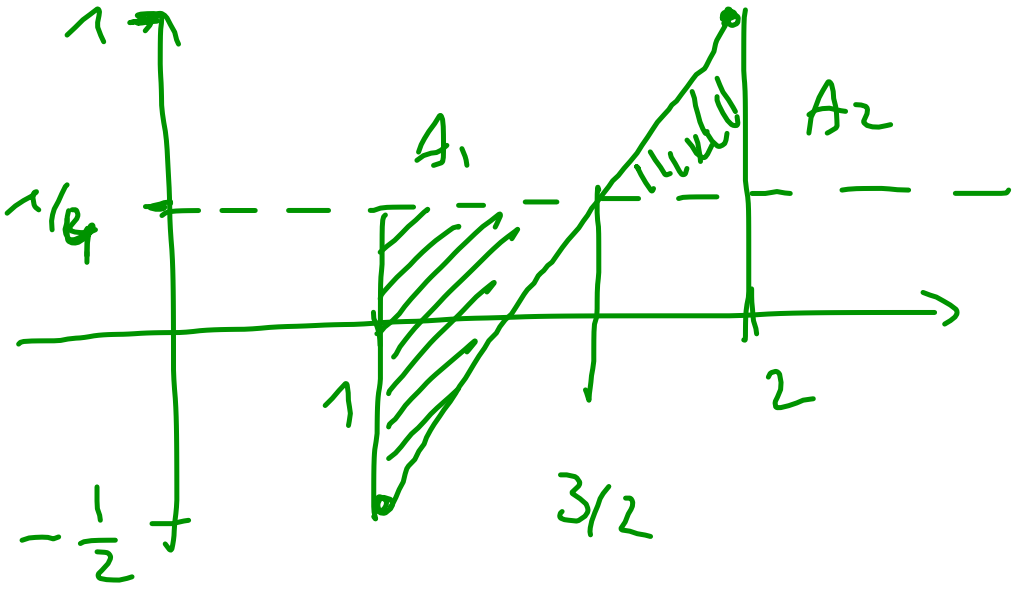
$f(\tilde{x}_0) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\tilde{x}_0 = \frac{1}{4} = \frac{a_0}{2}$

$\tilde{x}_0 \in [0, 1)$

$\tilde{x}_0 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$x_0 \in [1, 2) \Rightarrow$

$x_0 = \tilde{x}_0 + T = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$



$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(t-1)$$

↑ wegen Periode 2 ist

$$g(t) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \int_1^{3/2} |f(t) - g(t)|\,dt =$$

$$= \int_1^{3/2} \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(t-1) \right) \right) dt$$

$$= \int_1^{3/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \right) dt =$$

$$= \int_1^{3/2} \left(-\frac{3}{2}t + \frac{9}{4} \right) dt =$$

$$= \left[-\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t \right]_1^{3/2} =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4} =$$

$$= \frac{9}{4}\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 \right) + \frac{3}{4} =$$

$$= -\frac{9}{16} + \frac{12}{16} = \frac{3}{16} = A_1$$

$$A_2 = \int_{3/2}^{2} |f(t) - g(t)| \, dt =$$

$$= \int_{3/2}^{2} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \right) - \frac{1}{4} \right) dt =$$

$$= \int_{3/2}^{2} \left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \right) dt =$$

$$= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}t \right]_{3/2}^{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{9}{4} - \frac{6}{4}\right) =$$

$$= 3/2 - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

Rechenfehler !

$A_1 = A_2$ (müsste gelten)

Weiter : Bezeichnungen :

(C) ω_0 "Grundfrequenz"

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$n=1$: $[a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t)]$

"Grundschwingung"

(d) $(n\omega_0)$ "Oberfrequenz" für $n > 1$

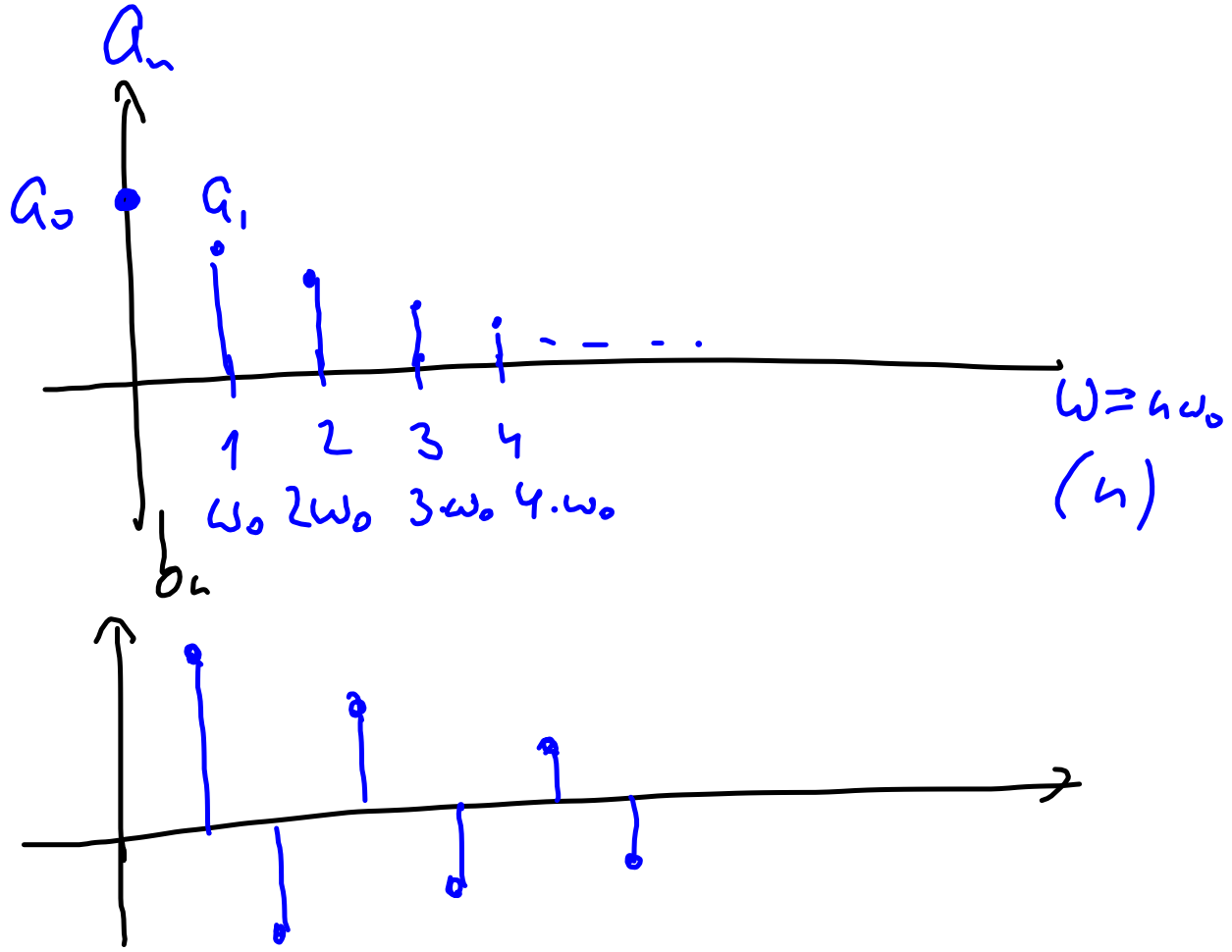
$[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

Oberschwingung für $n > 1$

(e) a_n, b_n Fourier-Koeffizienten

Spektralwerte

(1) a_n, b_n werden graphisch im sog. Spektral- bzw. Frequenzbereich als Linienspektren dargestellt:



Satz: Es gilt stets:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |b_n| = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} c_k = 0$$

Übung am Montag:

Interpr. von Spektren