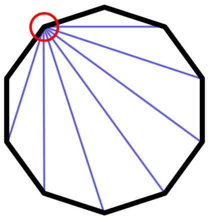
Mathematik 3
6. Übungsblatt

Aufgabe 1



Wählt man allgemein bei einem n-Eck eine Ecke fest aus (rot markiert), so kann man diese Ecke mit n-3 weiteren Ecken durch Diagonalen verbinden (blaue Linien). Dies liegt daran, dass immer genau 3 Ecken weg fallen, nämlich die ursprüngliche, sowie deren beiden direkten Nachbarn.
Wenn man nun für alle n Ecken jeweils Diagonalen zu den n-3 restlichen Ecken einzeichnet, hat man allerdings zu viele Diagonalen, da jede Ecke sowohl als Start-, als auch als Endpunkt einer Diagonale verwendet wurde. Man muss also allgemein am Ende noch durch 2 teilen:

$$diagonalen(n)=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

Ein Zehneck besitzt somit 35 Diagonalen:

$$diagonalen(10)=\frac{10\cdot(10-3)}{2}=35$$

Aufgabe 2

<u>Anmerkung:</u> Interpretation 2 enthält die gewünschte Lösung!

<u>Interpretation 1:</u> Im Zähler und im Nenner können jeweils dieselben Zahlen stehen. Gesucht ist die Anzahl unterschiedlicher Werte, die durch solche Brüche dargestellt werden können.

Für eine ganz bestimmte Zahl im Zähler kann man jeweils 6 unterschiedliche Zahlen in den Nenner schreiben. Da man 6 solche ganz bestimmten Zahlen in den Zähler schreiben kann, erhalten wir

$$6\cdot 6=36$$

Brüche. Bei diesen Brüchen muss man allerdings beachten, dass solche mit gleicher Zahl im Nenner und im Zähler auch jeweils den gleichen Wert haben. Unter den oben berechneten 36 Brüchen sind also die Brüche

$$\frac{3}{3}\ ,\ \frac{5}{5}\ ,\ \frac{7}{7}\ ,\ \frac{11}{11}\ ,\ \frac{13}{13}\ \text{und}\ \frac{17}{17}$$

enthalten, die alle den gleichen Wert 1 haben. Man muss also noch 5 von obigem Ergebnis abziehen. Da im Zähler und im Nenner immer Primzahlen stehen, gibt es auch keine weiteren Brüche mit gleichem Wert. Die Anzahl der Brüche lautet also:

$$6\cdot 6-5=31$$

<u>Interpretation 2:</u> Im Zähler und im Nenner stehen grundsätzlich unterschiedliche Zahlen.

Für eine ganz bestimmte Zahl im Zähler kann man jeweils die 5 von dieser Zahl verschiedenen Zahlen in den Nenner schreiben. Es ergibt sich also für die Anzahl der Brüche:

$$6\cdot 5=30$$

Aufgabe 3

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Die Anzahl kann man also herleiten, indem man die Zifferntripel bestimmt, deren Summe durch 3 teilbar ist:

$$(0,1,2),\ (0,1,5),\ (0,2,4),\ (0,4,5),\ (1,2,3),\ (1,3,5),\ (2,3,4),\ (3,4,5)$$

Aus den Tripeln mit einer 0 kann man jeweils

$$3!-(3-1)! \;=\; 6-2 \;=\; 4$$

dreistellige Zahlen bilden (da die 0 nicht am Anfang stehen darf). Aus den restlichen Tripeln kann man jeweils

$$3! \;=\; 6$$

dreistellige Zahlen bilden. Es gibt also 40 durch 3 teilbare dreistellige Zahlen:

$$4\cdot 4+4\cdot 6 \;=\; 4\cdot(4+6) \;=\; 40$$

Aufgabe 4

Anzahl der Möglichkeiten, die man hat, um 4 Frauen aus einer Gruppe von 10 auszuwählen:

$$n_f \;=\; \binom{10}{4} \;=\; \frac{10!}{4!\cdot 6!}$$

Anzahl der Möglichkeiten, die man hat, um 4 Männer aus einer Gruppe von 6 auszuwählen:

$$n_m \;=\; \binom{6}{4} \;=\; \frac{6!}{4!\cdot 2!}$$

Nun hat man also eine Gruppe von 4 Männern und 4 Frauen, und die Anzahl an Möglichkeiten, daraus 4 Paare zu bilden, beträgt:

$$n_p \;=\; 4!$$

Insgesamt beträgt die Anzahl möglicher 4-Paar-Konstellationen also:

$$\begin{aligned} n &= n_f \cdot n_m \cdot n_p \\ &= \frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 4! \\ &= \frac{10!}{4!\cdot 2!} \\ &= \frac{10!}{24\cdot 2} \\ &= \frac{10!}{48} \\ &= \frac{3.628.800}{48} \\ &= 75.600 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Zunächst teilt man die 36 Karten in zwei gleich große Stapel auf. Bezogen auf einen solchen Stapel wählt man also ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zufällig 18 aus 36 Karten aus. Die Anzahl an Möglichkeiten, um dies zu tun, berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} n_\Omega &= \binom{36}{18} \\ &= \frac{36!}{18!\cdot(36-18)!} \\ &= \frac{36!}{18!\cdot 18!} \\ &= \frac{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18} \\ &= \frac{19\cdot 2\cdot 21\cdot 2\cdot 23\cdot 2\cdot 25\cdot 2\cdot 27\cdot 2\cdot 29\cdot 2\cdot 31\cdot 2\cdot 33\cdot 2\cdot 35\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} \\ &= 19\cdot 23\cdot 5\cdot 29\cdot 31\cdot 33\cdot 2\cdot 35\cdot 2 \\ &= 9.075.135.300 \end{aligned}$$

Man kann also auf 9.075.135.300 Arten einen Stapel, bestehend aus 18 Karten, bilden. In diesem Stapel muss nun Folgendes gelten: es müssen sowohl exakt 9 aus insgesamt 18 roten Karten, als auch exakt 9 aus insgesamt 18 schwarzen Karten gezogen werden. Die Anzahl an Möglichkeiten, die man hierfür hat, berechnet sich für rote und schwarze Karten jeweils gleichermaßen:

$$\begin{aligned} n_{rot} = n_{schwarz} &= \binom{18}{9} \\ &= \frac{18!}{9!\cdot 9!} \\ &= \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} \\ &= 11\cdot 13\cdot 5\cdot 2\cdot 17\cdot 2 \\ &= 48.620 \end{aligned}$$

Da sowohl 9 rote, als auch 9 schwarze Karten im Stapel enthalten sein müssen, gilt für die Anzahl:

$$\begin{aligned} n &= n_{rot}\cdot n_{schwarz} \\ &= 48.620^2 \\ &= 2.363.904.400 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Anzahl an Möglichkeiten, gleichzeitig 9 aus 18 schwarze und 9 aus 18 rote Karten zu wählen, dividiert durch die gesamte Anzahl, 18 aus 36 Karten zu wählen:

$$P(A) = \frac{n}{n_\Omega} = \frac{2.363.904.400}{9.075.135.300} \approx 0{,}26048$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also ungefähr 26%.

Aufgabe 6

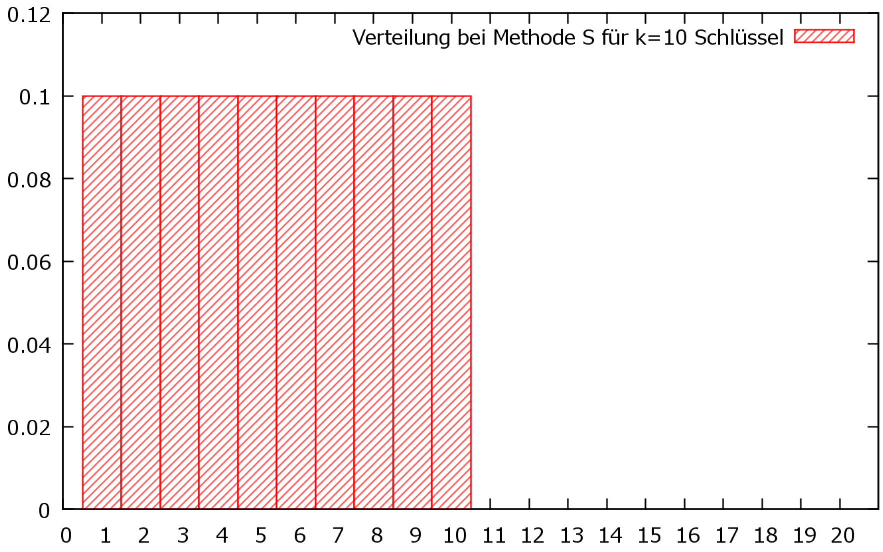
- wird in der Übung besprochen -

Aufgabe 7

Die gesuchten Verteilungen und Erwartungswerte wurden bereits in den Vorlesungsunterlagen berechnet:

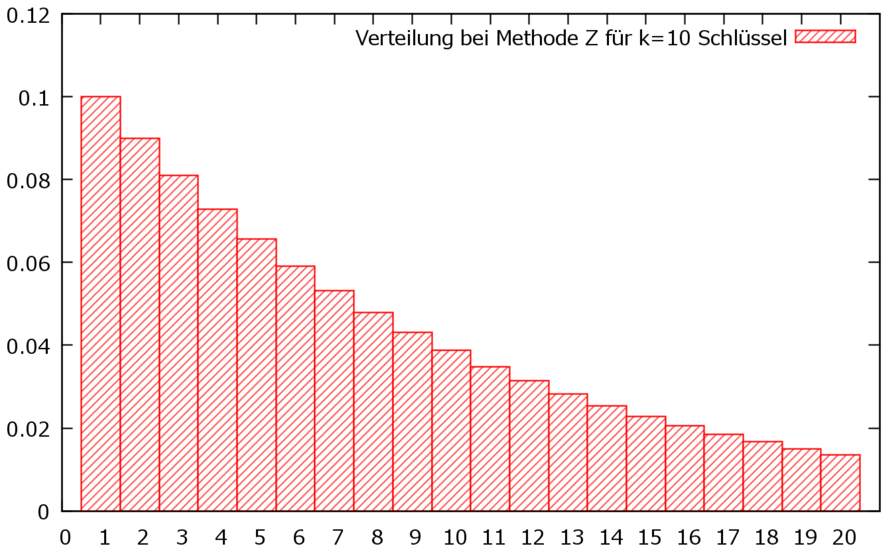
<u>Methode S:</u> Die Verteilung von X_S *lautet:* $\left(p_i = \frac{1}{k} \mid i = 1, 2, \ldots, k\right)$ *(Herleitung siehe Skript!)*

Beispiel k = 10 Schlüssel:



<u>Methode Z:</u> Die Verteilung von X_Z *lautet:* $\left(p_i = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{k}\right) \mid i = 1, 2, \ldots\right)$ *(siehe Skript!)*

Beispiel k = 10 Schlüssel:



<u>Methode S:</u> Der Erwartungswert von X_S *berechnet sich wie folgt:*

$$E(X_S) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{k} i \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{k} \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1)}{2}$$

Bei k = 10 Schlüsseln erhält man also den Erwartungswert $E(X_S) = \frac{(10+1)}{2} = 5{,}5$

Das bedeutet, dass man mit der systematischen Methode im Mittel ungefähr beim 5. oder 6. Versuch den passenden Schlüssel findet.

<u>*Methode Z:*</u> *Gegeben:* $k>0$

$$E(X_Z) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1}$$

Sei nun $x = \frac{k-1}{k} = 1-\frac{1}{k}$ *und somit* $x<1$ *für alle möglichen positiven k.*

Sei weiterhin $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot x^{i-1}$ *, d.h.* $E(X_Z)=\frac{1}{k} \cdot f(x)$

Dann gilt $F'(x)=f(x)$ *, also* $F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x^i$

Dies entspricht der geometrischen Reihe, also $F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x}$ *, da* $|x|<1$ *gilt.*

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Für den Erwartungswert gilt somit:

$$\begin{aligned}
E(X_Z) &= \frac{1}{k} \cdot f(x) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-2\mathrm{x}+x^2} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-2 \cdot \left(1-\frac{1}{k}\right)+\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-2+\frac{2}{k}+\left(1-\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{k^2}\right)} \\
&= \frac{1}{k} \cdot k^2 = k
\end{aligned}$$

Bei k = 10 Schlüsseln erhält man also den Erwartungswert $E(X_Z) = 10$

Das bedeutet, dass man mit der zufälligen Methode im Mittel ungefähr beim 10. Versuch den passenden Schlüssel findet.

<u>Methode S:</u> Die Varianz von X_S *berechnet sich wie folgt:*

$$
\begin{aligned}
Var(X_S) &= \sum_{i=1}^{k} (i - E(X_S))^2 \cdot p_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(i - \frac{k+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 - i \cdot (k+1) + \frac{(k+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \left(i^2 - i \cdot (k+1)\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(k+1)^2}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 - i \cdot (k+1)\right) + \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{(k+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 - i \cdot (k+1)\right) + \frac{1}{k} \cdot \left(k \cdot \frac{(k+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(i^2 - i \cdot (k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (i^2) \; - \; \sum_{i=1}^{k} (k+1) \cdot i\right)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \sum_{i=1}^{k} i^2 &&= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} \\
&2) \quad \sum_{i=1}^{k} (k+1) \cdot i &&= (k+1) \cdot \sum_{i=1}^{k} i \\
& &&= (k+1) \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \; Var(X_S) &= \frac{(k+1)^2}{4} + \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (i^2) \; - \; \sum_{i=1}^{k} (k+1) \cdot i\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} \; - \; (k+1) \cdot \frac{k \cdot (k+1)}{2}\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \left(\frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{6} \; - \; \frac{(k+1)^2}{2}\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \left(\frac{(k+1) \cdot (2k+1)}{6} \; - \; \frac{3 \cdot (k^2 + 2k + 1)}{6}\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \left(\frac{(2k^2 + 2k + k + 1)}{6} \; - \; \frac{3k^2 + 6k + 3}{6}\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4} + \left(\frac{(2k^2 + 3k + 1) - (3k^2 + 6k + 3)}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{4} + \left(\frac{-k^2-3k-2}{6}\right)$$
$$= \frac{3k^2+6k+3}{12} + \left(\frac{-2k^2-6k-4}{12}\right)$$
$$= \frac{k^2-1}{12}$$

Für k = 10 Schlüssel ergibt sich somit die Varianz $Var(X_S) = \frac{10^2-1}{12} = 8{,}25$

<u>Methode Z:</u> *Die Varianz von* X_Z *berechnet sich wie folgt:*

$$Var(X_Z) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-E(X_Z))^2 \cdot p_i$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left((i-k)^2 \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left((i-k)^2 \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1}\right)$$

Fortsetzung folgt...