# Vorbereitung zur Klausur Mathematik 2 MT
# HTW des Saarlandes

Dimitri Ovrutskiy

9. Juli 2008

# 1 Komplexe Zahlen

*Sei $j = \sqrt{-1}$ die komplexe Einheit. Die Zahl wird oft auch als $i$ bezeichnet.*

## 1.1 Rechnen in $\mathbb{C}$

**Aufgabe 1** *Für $z_1 = 2 - 2j$ und $z_2 = 1,5e^{1,5\pi j}$ berechne*

$$-\frac{z_1}{z_2^*} \quad \textit{und} \quad z_1 - z_2^*$$

*und stelle die Ergebnisse jeweils in NF und EF dar.*

**Lösung:** Schreibe zunächst beide Zahlen in der gleichen Darstellungsform: $z_1 = 2 - 2j$, also $|z_1| = 2\sqrt{2}$ und $\arg z_1 = \frac{7\pi}{4} \rightarrow$

$$z_1 = 2 - 2j = 2\sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}},$$

$z_2 = 1,5e^{1,5\pi j} \rightarrow Re\ z_2 = 1,5\cos 1,5\pi = 0$, $Im\ z_2 = 1,5\sin 1,5\pi = -1,5$, also

$$z_2 = 1,5e^{1,5\pi j} = -1,5j.$$

Nun berechnet man die Komplexkonjugierte zu $z_2$:

$$z_2^* = 1,5e^{-1,5\pi j} = 1,5j.$$

1. $-\frac{z_1}{z_2^*}$: Komplexe Division läßt sich am leichtesten in der Euler-Form durchführen:

$$-\frac{z_1}{z_2^*} = \frac{2\sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}}}{1,5e^{-1,5\pi j}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}e^{j(\frac{7}{4}+\frac{6}{4})\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}e^{j\frac{13}{4}\pi}.$$

   Die Normalform bestimmt man nun mit Hilfe der trigonometrischer Darstellung einer komplexer Zahl:

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}e^{j\frac{13}{4}\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\frac{13}{4}\pi + j(\frac{4\sqrt{2}}{3}\sin\frac{13}{4}\pi) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\frac{5}{4}\pi + j(\frac{4\sqrt{2}}{3}\sin\frac{5}{4}\pi) =$$

$$= (-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{4\sqrt{2}}{3} - j\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}j.$$

2. $z_1 - z_2^*$:

$$2 - 2j + 1,5e^{1,5\pi j} = 2 - 0,5j.$$

$$|2 - 0,5j| = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2},$$

$$\tan(\arg(2 - 0,5j)) = \frac{-0,5}{2} = -\frac{1}{4}.$$

   Mit Beachtung des richtigen Quadrants gilt dann:

$$\phi = -0,2449 \approx -0,25 \quad \text{und} \quad z_1 - z_2^* = \frac{\sqrt{17}}{2}e^{-0.25j}.$$

**Bemerkung 2** ***Formel von Moivre zur berechnung der komplexen Wurzeln:***

*Sei $z = re^{j\phi}$ gegebene komplexe Zahl. Dann $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $k = 0, 1, ..., n-1$ gibt es genau $n$ verschiedene $\sqrt[n]{z}$, und diese werden wie folgt bestimmt:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + j\sin(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n})) =$$

$$= \sqrt[n]{r}e^{j(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}e^{j\frac{\phi}{n}}e^{jk\frac{2\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

**Aufgabe 3** *Berechne alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des Polynoms $P(z) = z^4 + 81$. Zeichne die Lösungen als Zeiger!*

**Lösung:**

Nullstellen von $P(z)$ sind die Lösungen der Gleichung $P(z) = 0$, d.h.

$$z^4 + 81 = 0,$$

oder

$$z^4 = -81, \quad \text{also } z = \sqrt[4]{-81}.$$

Sei $z_0 = -81$, dann $r := |z_0| = 81$ und $\phi := \arg z_0 = \pi$. Nach Formel von Moivre (Bemerkung 2) bekommt man dann genau 4 Wurzeln $\sqrt[4]{-81}$. Diese sind die gesuchte Nullstellen des gegebenen Polynoms:

$$\sqrt[4]{-81} = 3(\cos(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + j\sin(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n})), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

also die gesuchte Nullstellen sind

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} + j\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} + j\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} - j\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Bild: selbst (Tafel, Maple, ... )!

## 1.2 Überlagerung von Schwingungen

**Bemerkung 4** ***Addition (Überlagerung) von Schwingungen:***

*Seien zwei Sinus-Schwingungen mit der gleichen Frequenz gegeben: $y_1(t) = A_1\sin(\omega t + \phi_1)$ und $y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \phi_2)$. Gesucht wird die resultierende Schwingung $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.*

*Wie geht man vor?*

*Der Fall mit $\phi_1 = \phi_2$ läßt sich direkt berechnen. Im Allgemeinen aber kommen die komplexe Zahlen zum Einsatz.*

*Man merkt, daß*

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi) = Im[A(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)] = Im[Ae^{j(\omega t+\phi)}],$$

*wobei $j = \sqrt{-1}$ die komplexe Einheit ist.*

*Also*

$$y_1(t) = Im[z_1(t)] := Im[A_1e^{j(\omega_1 t+\phi_1)}] = Im[(A_1e^{j\phi_1})e^{i\omega t}],$$

$$y_2(t) = Im[z_2(t)] := Im[A_2 e^{j(\omega_2 t+\phi_2)}] = Im[(A_2 e^{j\phi_2})e^{i\omega t}]$$

*und*

$$y(t) = y_1(t)+y_2(t) = Im[z_1(t)+z_2(t)] =: Im[z(t)] = Im[(A_1 e^{j\phi_1}+A_2 e^{j\phi_2})e^{j\omega t}].$$

*Anderseits (Tafelbild: Interpretation einer Sin-Schwingung als Zeigerumdrehung in der komplexen Ebene → Frequenzerhaltung (Diese folgt direkt aus der obigen Formel!))*

$$y(t) = Bsin(\omega t + \psi) = Im[(Be^{j\psi})e^{j\omega t}].$$

*Man muß nun die Amplitude $B$ und die Phase $\psi$ finden:*

$$(Be^{j\psi})e^{j\omega t} = (A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2})e^{j\omega t},$$

*also gilt*

$$Be^{j\psi} = A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}.$$

*Dann (unter Verwendung der trigonometrischen und eulerischen Formen einer komplexen Zahl und geometrischen Überlegungen in der komplexen Ebene (Satz von Pythagoras)) gilt:*

$$B = \sqrt{(A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2)^2 + (A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2)^2},$$

$$\tilde{\psi} = arctan \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}.$$

*Bei Feststellung von $\psi$ muß man den richtigen Quadrant beachten!*

**Aufgabe 5** *Berechne die resultierende Schwingung, die bei der Überlagerung von $u_1 = 2\sin(3t-\frac{\pi}{2})$ und $u_2 = 4\cos(3t+\frac{\pi}{4})$ entsteht, und zeichne das Ergebnis.*

**Lösung:**
Zunächst bringen wir $u_2$ auf sin-Form ($\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$:

$$u_2 = 4\cos(3t + \frac{\pi}{4}) = 4\sin(3t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 4\sin(3t + \frac{3\pi}{4}).$$

Mit den Überlegungen aus der Bemerkung 4:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = B\sin(3t + \psi),$$

wobei $B$ und $\psi$ wie folgt berechnet werden:

$$B = \sqrt{Re^2 z + Im^2 z} = \sqrt{(2\cos(-\frac{\pi}{2}) + 4\cos(\frac{3\pi}{4}))^2 + (2\sin(-\frac{\pi}{2}) + 4\sin(\frac{3\pi}{4}))^2} \approx 2,95,$$

$$\tilde{\psi} = \arctan\frac{Imz}{Rez} = \arctan\frac{2\sin(-\frac{\pi}{2}) + 4\sin(\frac{3\pi}{4})}{2\cos(-\frac{\pi}{2}) + 4\cos(\frac{3\pi}{4})} \approx -0,29,$$

also

$$\psi = -0,29 + \pi.$$

Zeichnung: selbst (Tafel, Maple, ...)!

**Aufgaben 6** *Berechne die Überlagerung von folgenden Schwingungen:*

1. $y_1 = -4\sin(2,45t + 0,75\pi),\ y_2 = 2,5\sin(2,45t - 0,125\pi)$
2. $y_1 = 6,3\cos(220t + \pi),\ y_2 = 5,6\sin(220t - 0,6\pi)$
3. $y_1 = 0,5\cos(12t + \frac{5}{6}\pi),\ y_2 = 5,6\sin(12t - \frac{2}{3}\pi)$

**Bemerkung 7** $B\sin(\omega t + \phi) = A_1\sin(\omega t + \phi_1) + A_2\sin(\omega t + \phi_2)$. *Dann gilt auch:*

$$B = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \quad \textit{(Quadranten beachten!)}$$

## 2 Grenzwertberechnung

**Algorithmus 8** *Der Grenzwert einer rationalen Funktion läßt sich wie folgt bestimmen:*

*1) Kürze $a_n$ durch den größten auftretenden Exponenten im Nenner.*

*2) Wende Grenzwertsätze an.*

**Aufgabe 9** *Bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:*

1. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^9+3n^6-1}+4n^3-4}{2n^3-2n+3}$
2. $a_n = \frac{12n^5+8n^4-4n^3+\frac{1}{5}n+31}{7n^5-n^3-1}$
3. $a_n = \frac{3n^3-7n+5}{10n^2+n}$

**Lösung:**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wende Algorithmus 8 an:

1.
$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^9 + 3n^6 - 1} + 4n^3 - 4}{2n^3 - 2n + 3} = \frac{\frac{\sqrt[3]{n^9+3n^6-1}}{n^3} + \frac{4n^3}{n^3} - \frac{4}{n^3}}{2 - \frac{2n}{n^3} + \frac{3}{n^3}} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^9}} + 4 - \frac{4}{n^3}}{2 - \frac{2n}{n^3} + \frac{3}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+4}{2} = 2,5$$

2. Wir kürzen den Bruch durch $n^5$:
$$a_n = \frac{12 + \frac{8}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{5n^4} + \frac{31}{n^5}}{7 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^5}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{12}{7} \text{ nach Grenzwertsätzen}$$

3. Es ergibt sich:
$$\frac{3n - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}}{10 + \frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

**Aufgabe 10** *Berechne die folgenden Grenzwerte:*

*a)* $\lim_{x\to 0^+} x^x$

*b)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

*c)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}$

*d)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x}{x}$

*e)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos 2x}{3x}$

**Lösung:**

a) $(0^0)$ Bekanntermassen ist die Exponentialfunktion stetig. Wir können also schreiben:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln x) = \exp(\lim_{x\to 0^+} x\ln x)$$

Wegen:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

ergibt sich mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

ist also:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \exp(0) = 1$$

b) $(1^\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right) = \exp\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}},$$

also mit l'Hospital und

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)' = -\frac{1}{x(x+1)}$$

ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

und somit

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

c) ($1^\infty$) Analog zu $b$) bekommt man $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} = 0$.

d) $(\frac{1}{0})$ l'Hospital darf nicht angewendet werden! Der Gernzwert existiert nicht! Denn $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x+\cos x}{x} = \infty = -\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x+\cos x}{x}$.

Unkritische Anwendung von l'Hospital führt auf den Quotienten $\frac{\cos x-\sin x}{1}$, und der geht für $x\to 0$ gegen 1.

e) $(\frac{0}{0})$. Mit $sin'(t) = cos(t)$, $cos'(t) = -sin(t)$ und l'Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x - 2\sin 2x\sin x}{3} = \frac{1}{3}.$$

# 3 Differentialrechnung

*Ist eine Funktion in der parametrisierten Form $(x(t), y(t))$ gegeben, so läßt sich die Ableitung $y'(x)$ (vorausgesetzt, sie existiert) wie folgt berechnen:*

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

*Ist eine Funktion implizt durch die Gleichung $F(x, y(x) = 0$ gegeben, so sucht man die Ableitung $y'(x)$ wie folgt:*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))},$$

*wobei $F_x(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))$ die partielle Ableitung von $F$ nach $x$ und $F_y(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))$ die partielle Ableitung von $F$ nach $y$ sind. Ist $y = f(x)$ eine umkehrbare differenzierbare Funktion, dann it die Umkehrfunktion $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt:*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \textit{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \textit{für } f'(x) \neq 0.$$

**Aufgabe 11** *In welchen Bereichen ist die Funktion $f(t) = 7(2-3t)e^{-3t}, (t \geq 0)$*

*a) monoton wachsend? Streng monoton Wachsend?*

*b) konvex?*

*c) Bestimme die Asymptote von $f(t)$ für $t \to \infty$.*

**Lösung:**

a) $f(x)$ ist monoton wachsend auf dem Intervall $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0,\ x \in I$.

$$f'(t) = 7[(2-3t)e^{-3t}]' = 7(-3e^{-3t} + (2-3t)(-3)e^{-3t}) =$$
$$-21e^{-3t}(1 + 2 - 3t) = -63(1-t)e^{-3t}.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, muß $1-t \leq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$ gelten, um $f'(t) \geq 0$ zu sichern. D.h. daß für $t \geq 1$ $f(t)$ monoton wachsend ist, und für $t \geq 1$ - streng monoton wachsend.

b) Konvex ist $f(x)$ genau dann, wo $f''(x) \geq 0$ gilt (vorausgesetzt, die 2. Ableitung existiert).

$$f''(t) = (f'(t))' = (-63(1-t)e^{-3t})' = -63(-e^{-3t} + (1-t)(-3)e^{-3t}) =$$
$$= 63(4-3t)e^{-3t}.$$

Als Wendepunkte können nur die NSen von $f''(t)$ vorkommen:

$$4 = 3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.$$

Links von $t = \frac{4}{3}$ ist $f''(t)$ positiv, rechts - negativ. D.h., in $t = \frac{4}{3}$ hat $f(t)$ einen Wendepunkt; $f(t)$ ist für $t \in [0, \frac{4}{3}]$ konvex (NB: Definitionsbereich!).

c) Asymptote für $t \to \infty$:

$f(t) = 7(2-3t)e^{-3t}$; für $t \to \infty$ ergibt sich Unbestimmheit der Art $(0 * \infty)$

$$7(2-3t)e^{-3t} = \frac{7(2-3t)}{e^{3t}}.$$

Nun hat man $(\frac{\infty}{\infty})$. Wenden wir l'Hospital an:

$$\frac{-21}{3e^{3t}} = -\frac{7}{e^{3t}} \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

D.h. $f(t)$ hat eine horizontale Asymptote $y = 0$ für $t \to \infty$.

**Aufgabe 12** *Die Bahnkurve eines Schiffs im Hafen wird durch eine Funktion $y = f(x)$ wie folgt in abhängigkeit der Zeit $t$ beschrieben:*

$$x(t) = \sqrt{t+1}, \qquad y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}, \qquad t \geq 1.$$

*a) Bestimme den Anstieg der Tangenten an die Bahnkurve zur Zeit $t = 2$.*

*b) Wie lautet die Gleichung dieser Tangenten?*

**Lösung:**

a) Anstieg der Tangenten zumGraphen der $f(x)$ in Punkt $(x_0, y_0)$ wird durch den Wert der Ableitung $f'(x_0)$ gegeben. Für parametrisierte Kurven gilt:

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Berchnen wir nun die entsprechende Ableitungen:

$$\dot{x}(t) = (\sqrt{t+1})'_t = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+1}},$$

$$\dot{y}(t) = \left(\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right)'_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}.$$

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{2}{(t+1)^2}\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}}\sqrt{t+1} = \frac{2}{(t+1)\sqrt{t-1}}.$$

Nun ist der gesuchte Anstieg $y'(x)_{t=2} = \frac{2}{3}$.

b) Sie die Gerade $g(x) = ax + b$ die gesuchte Tangente. Wegen Teil $a)$ ist $a = \frac{2}{3}$, also $g(x) = \frac{2}{3}x + b$. Bestimmen wir nun $b$. Dazu berechnen wir die Koordinaten von dem Berührungspunkt $(x(2), y(2))$:

$$x(2) = \sqrt{3}, \quad y(2) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und der Punkt $(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ liegt am Graph der Geraden $g(x) = \frac{2}{3}x + b$.

$$\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

und die Gleichung der gesuchten Tangenten ist

$$y(x) = g(x) = \frac{1}{3}(2x - \sqrt{3}).$$

**Aufgabe 13** *Bestimme den Winkel zwischen der Tangenten an die Funktion* $y(x) = x^{\sin x}$ *im Punkt* $(\pi, y(\pi)$ *und der* $x$*-Achse.*

**Lösung:** Einerseits ist der Anstieg der Tangenten zur Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0$ gleich $f'(x_0)$. Anderseits sei eine Gerade $y = ax + b$ gegeben. Dann gilt $\tan\alpha = a$, wobei durch $\alpha$ der Winkel zwischen der Geraden und der $x$-Achse bezeichnet wird.

$f(x) = x^{\sin x}$. Dann gilt:

$$f'(x) = (x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)' =$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

$$\tan\alpha = f'(\pi) = \pi^{\sin\pi}(\cos\pi \ln\pi + \frac{\sin\pi}{\pi}) = -\ln\pi \approx -1,145.$$

$$\alpha = \arctan(-1,145) \approx -0,85.$$

# 4 Allgemeine Eigenschaften von Funktionen

*Kurvendiskussion umfasst:*

- *Definitionsbereich, evtl. Wertebereich*
- *Symmetrien*
- *Nullstellen und Stetigkeitsanalyse*
- *Ableitungen*
- *Extrema*
- *Wendepunkte*
- *Krümmung (Konvex/Konkav)*

- *Pole, Asymptoten*
- *Graph*

**Aufgabe 14** *Gebe die behebbaren Unstetigkeitsstellen, Polstellen, Nullstellen und Asymptoten folgender gebrochen rationaler Funktion an. Berechne alle Grenzwerte durch getrennte Betrachtung von links- ud rechtsseiigem Grenzwert. Skizziere den Graph der Funktion.*

$$f(x) = \frac{(x^3 + x^2 - 9x - 9)(2x - 4)}{(x^2 - 3x + 2)(4x^2 - 36)}$$

**Lösung:**

$$f(x) = \frac{(x^3 + x^2 - 9x - 9)(2x - 4)}{(x^2 - 3x + 2)(4x^2 - 36)} = \frac{(x^2(x+1) - 9(x+1))(2(x-2))}{((x-1)(x-2))(4(x^2-3))} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x+3)(x-3)(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-3)(x-2)(x-1)}$$

Also $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Innerhalb von $D_f$ darf man nun kürzen:

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{x+1}{x-1}, \qquad x \in \mathbb{R} \backslash \{-3;\ 1;\ 2;\ 3\}.$$

Nun:

a) Unstetigkeitsstellen (alle Nullstellen von Nenner):

$$x = -3,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

Auf Hebbarkeit werden diese weiter unten untersucht.

b) Polstellen (die nicht gekürzte Nullstellen vom Nenner):

$$x = 1.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

c) Nullstellen (die nicht gekürzte Nullstelle vom Zähler):

$$x = -1$$

d) Hebbarkeit der Unstetigkeitsstellen:

(a) $x = 1$ ist eine Polstelle, und daher nicht hebbar.

(b) $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{-2}{-4}) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{-2}{-4}) = \frac{1}{4} \to$ hebbar ($f(x)$ ist in $x = -3$ steitg fortseztbar).

(c) $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{3}{1}) = \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{3}{1}) = \frac{3}{2} \to$ hebbar ($f(x)$ ist in $x = 2$ steitg fortseztbar).

(d) $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{4}{2}) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{2}(\frac{4}{2}) = 1 \to$ hebbar ($f(x)$ ist in $x = 3$ steitg fortseztbar).

e) Asymptoten:

(a) $x \to +\infty$: $\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1} \to \frac{1}{2}$
$x \to -\infty$: $\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1} \to \frac{1}{2}$
$f(x)$ hat eine horizontale Asymptote $y = \frac{1}{2}$.

(b) Wegen Teil *b*) (Polstelle) hat $f(x)$ eine vertikale Asymptote $x = 1$.

Da alle andere Unstetigkeitstellen hebbar sind, gibt es keine weitere Asymptote.

f) Graph: Tafel oder selbst!

**Aufgabe 15** *Untersuche die Funktion* $y(x) = (x^3 - 4x)\cos(3x + \pi)$ *in ihrem Definitionsbereich* $D_y = \mathbb{R}$ *auf*

*a) Nullstellen (gib alle NSen an!).*

*b) Symmetrie.*

*c) Welche Periode besitzt die Funktion* $g(x) = \cos(3x + pi)$*?*

*d) Skizziere* $g(x)$ *im Bereich* $x \in [-3\pi, 3\pi]$*.*

**Lösung:**

a) Nullstellen:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2).$$

Nun muß gelten

$$x(x-2)(x+2)\cos(3x + \pi) = 0.$$

Das bedeutet, daß entweder

$$x = 0,$$

oder

$$x = 2,$$

oder

$$x = -2,$$

oder

$$\cos(3x + \pi) = 0.$$

Finden wir die Nullstellen von $\cos(3x+\pi)$:

$$3x+\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z};$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Alle Nullstellen von $y(x)$ bilden also die Menge $\{-2;\ 0;\ 2;\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}\}$

b) Symmetrie:

$$y(-x) = (-x^3+4x)\cos(-3x+\pi) = -(x^3-4x)\cos(-3x-\pi) =$$
$$= -(x^3-4x)\cos(-(3x+\pi)) = -(x^3-4x)\cos(3x+\pi) = -y(x).$$

$y(x)$ ist also eine ungerade Funktion, oder punktsymmetrisch bzgl. $(0,0)$.

c) Periode von $g(x)$: $\cos t$ hat die Periode $2\pi$. Daher muß gelten:

$$\cos((3x+\pi)+2\pi) = \cos(3x+\pi).$$

I.A. ist bekannt, daß man den Graph von $cos(ax+b),\ a,b \in \mathbb{R}$aus dem Graphen von $\cos x$ durch Verschiebung um $-b$ und Streckung/Dehnung mit dem Faktor $a$ in der $x-$Richtung bekommt (Koordinatentransformation!). Das bedeutet, daß die Periode um Faktor $a$ verkleinert wird:

$$neue\ Periode = \frac{alte\ Periode}{a}.$$

In unserem Fall führt das auf die Periode $\frac{2\pi}{3}$.

d) Graph: Selbst! Tafel! Maple! ...

# 5 Taylor-Reihen

**Definition 16** *Sei $\xi \in (a,b)$ und sei die Funktion $f$ im Intervall $[a,b]$ (m+1)-mal differenzierbar.*
*Dann besitzt $f$ die* ***Taylorentwicklung:***

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)}_{\text{Taylorpolynom m-ten Grades}} + \underbrace{R_m(x,\xi)}_{\text{Restglied nach Lagrange}}$$

*Dabei ist:*

$$R_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}\ f^{(m+1)}(\xi + \theta\cdot(x-\xi))$$

*mit $\theta \in (0,1)$.*

**Bemerkung 17** *Eine andere Möglichkeit, die Taylorformel aufzuschreiben:*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + R_m(x,\xi)$$

**Aufgabe 18** *Bestimme die Taylorentwicklung von der Logarithmusfunktion*

$$f(x) = \ln x$$

*im Punkt 1 bis zum 3.Grad.*

**Lösung:** Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x} \\ \frac{d^2}{dx^2}\ln x &= -\frac{1}{x^2} \\ \frac{d^3}{dx^3}\ln x &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{d^4}{dx^4}\ln x &= -\frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + R_3(x,1)$$

Restglied:

$$R_3(x,1) = -\frac{(x-1)^4}{24} \cdot \frac{6}{1+\theta(x-1)} = -\frac{1}{4}(x-1)^4 \cdot \frac{1}{1+\theta\cdot(x-1)}$$

**Aufgabe 19** *a) Entwickle $f(x) = \cos x$ um $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.*

*b) Approximiere $\cos(1)$ durch ein Taylorpolynom $n$-ter Ordnung. Wähle die Ordnung $n$ dabei so aus, daß der Fehler der Approximation höhstens $10^{-3}$ beträgt.*

**Lösung:**

a) Zur Bestimmung von Taylor-ploynom brauchen wir die Ableitungen von $f(x)$:

$$f'(x) = \cos' x = -\sin x,$$

$$f''(x) = -\sin' x = -\cos x,$$

$$f'''(x) = \sin x,$$

$$f^{iv}(x) = \cos x = f(x).$$

Somit haben wir **alle** Ableitungen der Funktion $f(x) = \cos x$ erhalten. Die Taylor-Entwicklung einer $m+1$-mal stetig differnezierbarer in $x_0$ Funktion $g(x)$ um den Punkt $x_0$ hat i.A. die Form (mit dem Restglied von Lagrange):

$$g_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} g^{(k)}(x_0) + R_m(x,x_0),$$

$$R_m(x,x_0) = \frac{(x-x_0^{m+1})}{(m+1)!} g^{(m+1)}(x_0+\theta(x-x_0)), \quad \theta \in (0,1).$$

Werten wir nun die Ableitungen der $f(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ (**alle** Ableitungen existieren - $\cos x$ ist unendlich oft differenzierbar!):

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(0) = -1,$$
$$f'''(0) = 0,$$
$$f^{iv}(0) = 1,$$

weiter wiederholt sich alles.

$$\Rightarrow \cos x_{x_0=0} = 1 - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x,0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}(-1)^k + R_{2n+1}(x,x_0).$$

*Weil alle Ableitungen von* $\cos$ *existieren und die Reihe gegen* $\cos x$ *in einer Umgebung von* $0$ *konvergiert, schreibt man auch* $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. *Das ist die Taylor-Reihe von* $\cos x$ *in Umgebung von* $0$.

b) Bestimmen wir zunächst die kleinstmögliche Ordnung des Taylor-Polynoms, die gewünschte Geanuigkeit garantiert:

$$R_{2n+1} = R_m \leq 10^{-3}.$$

$\theta$ und $x$ sind uns unbekannt. Wir können die Ableitungen $f^{m+1}(y)\ \forall y$ abschätzen: aus der Berechnung in Teil $a$) wissen wir, daß alle Abletungen in einer der 4 Klassen liegen und entweder $\pm \sin$ oder $\pm \cos$ sind. Daher gilt:

$$|f^{(l)}(y)| \leq 1 \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \forall y,$$

und man kann eine Ableitung beliebiger Ordnung mit 1 nach oben abschätzen. Dann muß man minimale natürliche Lösung folgender Ungleichung finden, wobei $x = 1$ vorgegeben wurde:

$$\frac{(x-0)^{m+1}}{(m+1)!} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{(1)^{m+1}}{(m+1)!} \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(m+1)!} \leq 10^{-3}.$$

Man kann leicht nachrechnen, daß

$$6! = 720 < 10^3 < 7! = 5040$$

gilt. Das heißt: $m+1=7=2n+1$, also $n=3$ und die gesuchte Approximation ist

$$\cos 1 \approx \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{1}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720}.$$

**Aufgabe 20** *Zeige, daß:*

$$e^x \geq 1 + x$$

**Lösung:** Wir berechnen die Taylorformel im Punkt 0 mit Grad 1 von $e^x$:

$$e^x = 1 + x + R_1(x,0)$$

Und es gilt:

$$R_1(x,0) = \frac{x^2}{2}\, e^{\theta \cdot x} \geq 0$$

Also ist:

$$e^x \geq 1 + x$$

□

**Definition 21** *Sei $f$ eine $C^\infty$-Funktion, d.h. unendlich oft differenzierbar. Dann nennt man die Potenzreihe:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

*die **Taylorreihe** von $f$ um den Entwicklungspunkt $\xi$.*

**Satz 22** *Sei $f$ eine $C^\infty$-Funktion, und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) \Leftrightarrow \lim_{m \to \infty} R_m(x,\xi) = 0$$