Mathematik 4: Angewandte Mathematik
HTWdS SS 10
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Übungsblatt 2

Nullstellen-Bestimmung: Fixpunktsatz, Banach-Iteration und Newton-Verfahren; Bisektionsverfahren.

Aufgabe 1

Eine Lösung der Gleichung $x = \tan x$ *im Intervall* $(0; 2\pi)$ *kann ermittelt werden, wenn man die Gleichung* $x = \arctan x + \pi$ *lost. Die Lösung ist im Intervall* $[4; 5]$ *zu erwarten.*

Untersuchen Sie die Banach-Iteration für diese Gleichung, d.h.: Zeigen Sie, daß $\phi(x) = \pi + \arctan x$ *das Intervall* $[4; 5]$ *in sich abbildet und daß diese Abbildung eine Kontraktion ist.*

Schätzen Sie damit ab, wieviele Folgenglieder zu berechnen sind, damit

$$|x_n - \omega| < 10^{-5}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$.

a) Zeigen Sie, daß es im Intervall $[0; 1]$ *genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$ *gibt indem Sie*

(i) überprüfen, daß f *das Intervall* $[0; 1]$ *in sich selbst abbildet und*

(ii) nachweisen, das f *kontrahirend ist.*

b) Wieviele Iterationsschritte sind, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, *laut a-priori-Abschätzung höhstens nötig, um den Fispunkt mit einer Genauigkeit von* $\epsilon = 10^{-2}$ *zu approximieren?*

c) Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung der Funktion $g(x) = x - f(x)$ *auf und berechnen Sie, beginnend mit dem Startwert* $x_0 = 1/2$, *die erste drei Folgenglieder.*

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x$.

a) *Zeigen Sie, daß es im Intervall* $[\pi/4; \pi/2]$ *genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$ *gibt indem Sie*

   (i) *überprüfen, daß* f *das Intervall* $[0; 1]$ *in sich selbst abbildet und*

   (ii) *nachweisen, das* f *kontrahirend ist.*

b) *Wieviele Iterationsschritte sind, ausgehend vom Startwert* $x_0 = 0$, *laut a-priori-Abschätzung höhstens nötig, um den Fispunkt mit einer Genauigkeit von* $\epsilon = 10^{-6}$ *zu approximieren?*

c) *Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung der Funktion* $g(x) = x - f(x)$ *auf und berechnen Sie, beginnend mit dem Startwert* $x_0 = \pi/4$, *die erste drei Folgenglieder.*

Aufgabe 4

Sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} - x$ *gegeben.*

Untersuche, ob diese Funktion auf dem Intervall $[2; 3]$ *Nullstellen hat. Falls ja, wieviel? Beweis!*

Sollte es nur eine Nullstelle auf dem Intervall geben, wieviele Schritte der Banach-Iteration sind nötig (falls das Verfahren anwendbar ist: überprüfe die Voraussetzungen!), um diese mit der Genauigkeit 10^{-2} *zu bestimmen?*

Führe die erste 5 *Schritte des Bisektionsverfahrens aus.*

Aufgabe 5

Die Gleichung

$$1 + \xi^2 = e^{2\xi - 2}$$

soll gelöst werden. Geben Sie eine Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *an, die unabhängig vom gewählten Startpunkt* x_0 *gegen die Lösung der Gleichung konvergiert.*

Wählen Sie als Startwert $x_0 = 0$ *und geben Sie an, wieveile Iterationen Sie höhstens benötigen, um die gesuchte Lösung* ξ *auf* 3 *Nachkommastellen genau zu berechnen.*

Aufgabe 6

Sei f auf dem Intervall $[a;b]$ eine stetige differenzierbare Funktion mit der stetigen auf $[a;b]$ Ableitung ($f \in C^1[a;b]$). Weiter besitze f die Eigenschaft

$$\min_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 1.$$

a) *Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels, das eine solche Funktioneine Fixpunkt $x_* \in [a;b]$ besitzen kann.*

b) *Zeigen Sie, daß bei Funktionen mit der obigen eigenschaft die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert x_0, der kein Fixpunkt ist, divergiert.*