Vorlesung 3: Die kontinuierliche Fourier-Transformation

Dimitri Ovrutskiy

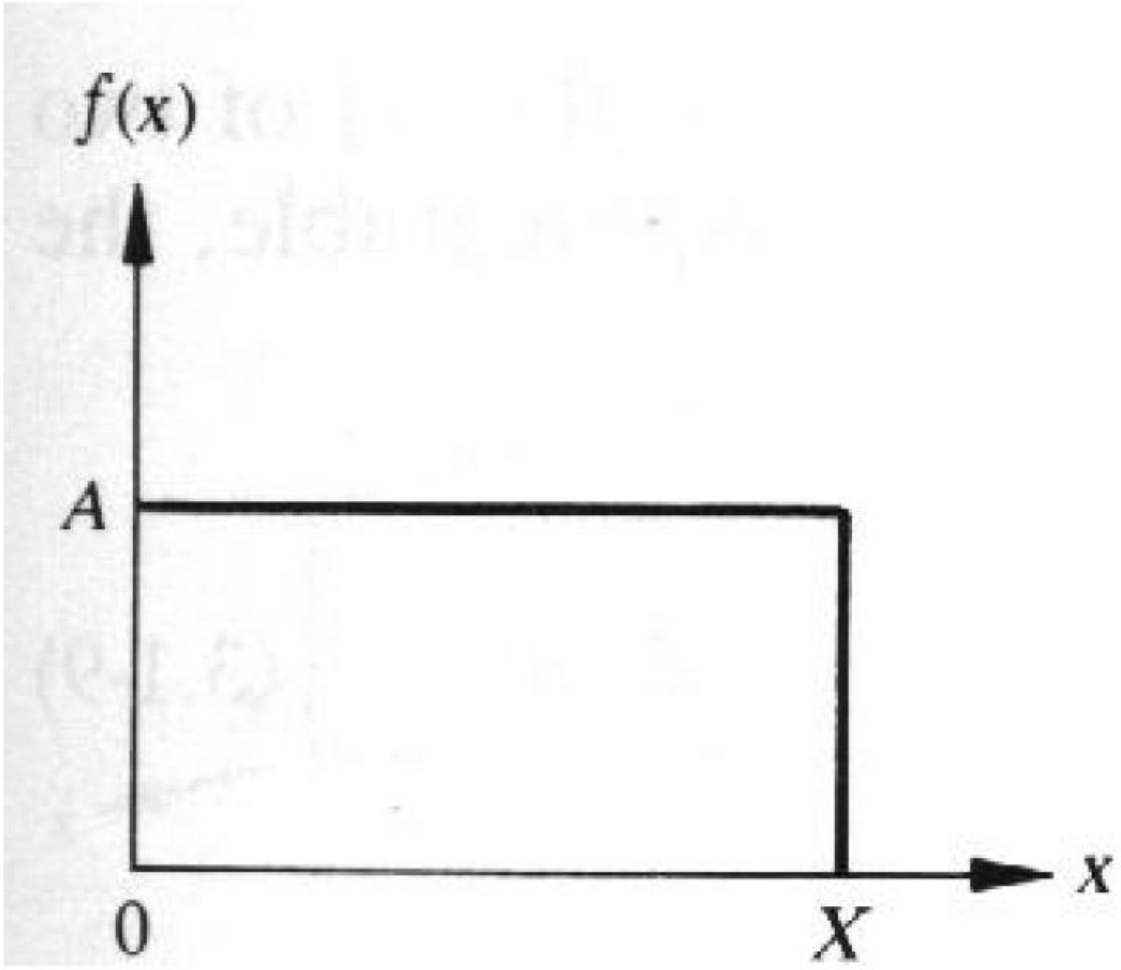
SS 2009 HTWdS

Auf Basis der Vorlesung an der UdS im WS 02/03 von
und mit Danksagung an

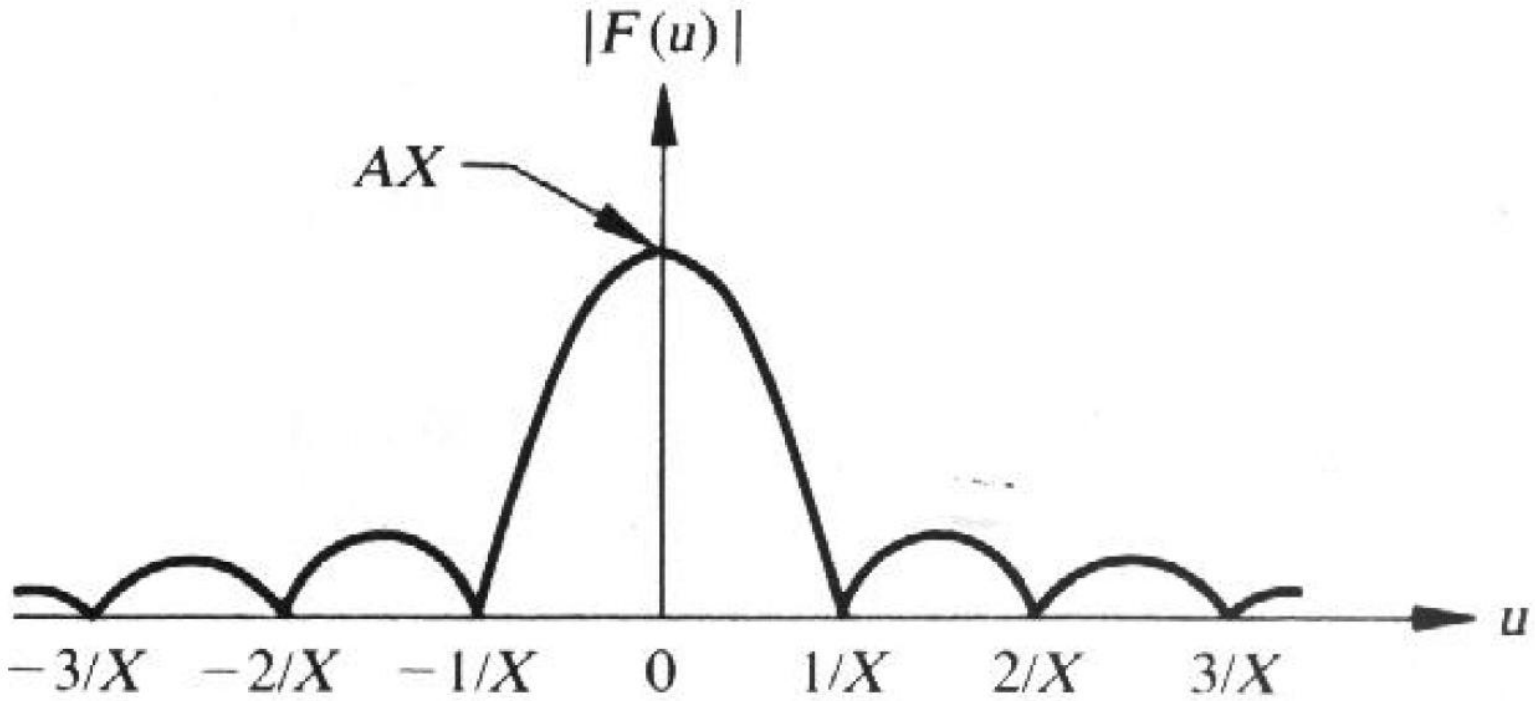
Hr. Prof. Dr. J. Weikert

Themen:

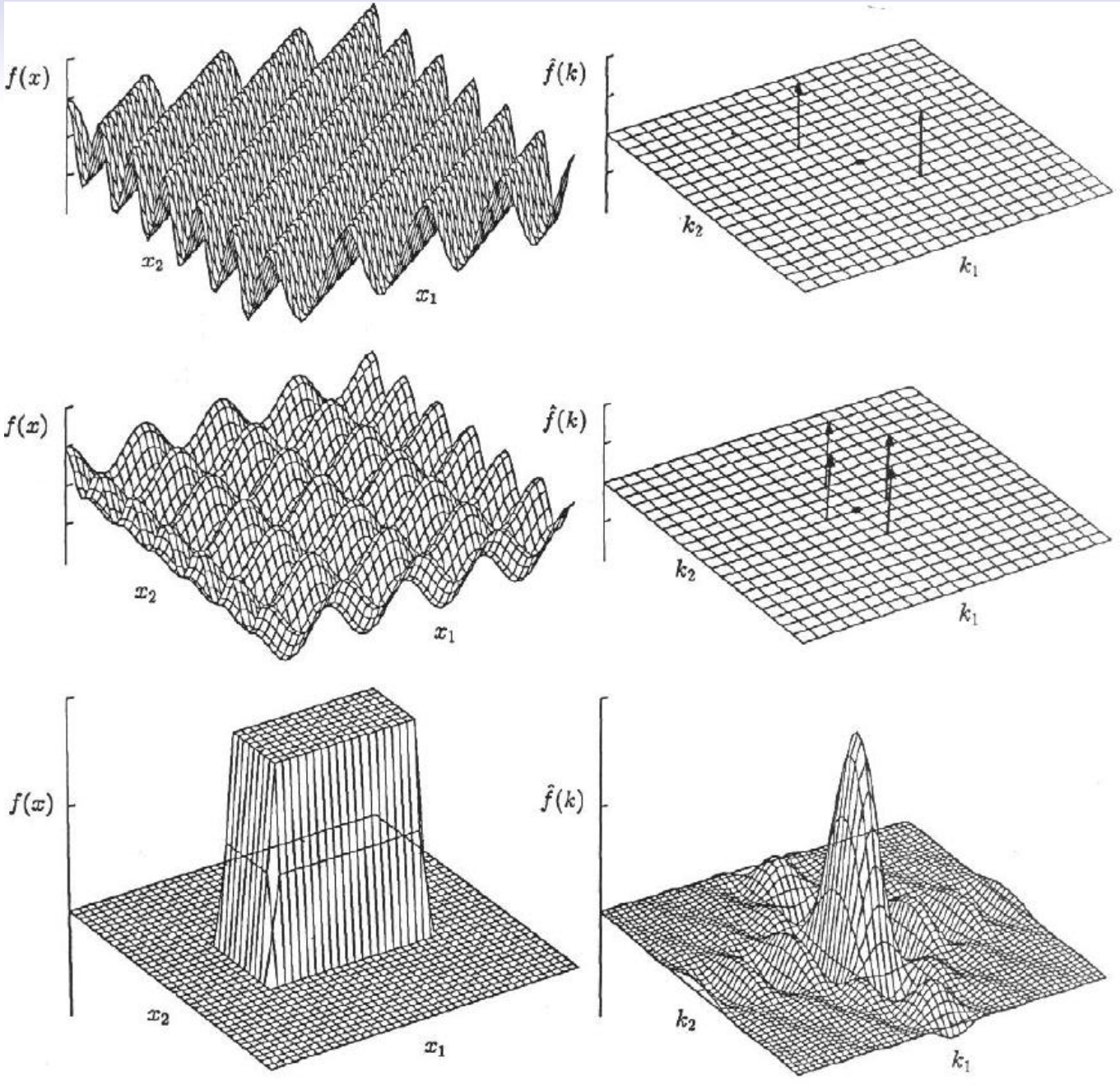
1. Kontinuierliche 1D Fourier-Transformation
2. Kontinuierliche 2D Fourier-Transformation
3. Eigenschaften der kontinuierlichen Fourier-Transformation
4. Das Abtasttheorem: Erzeugeung der diskreten Data



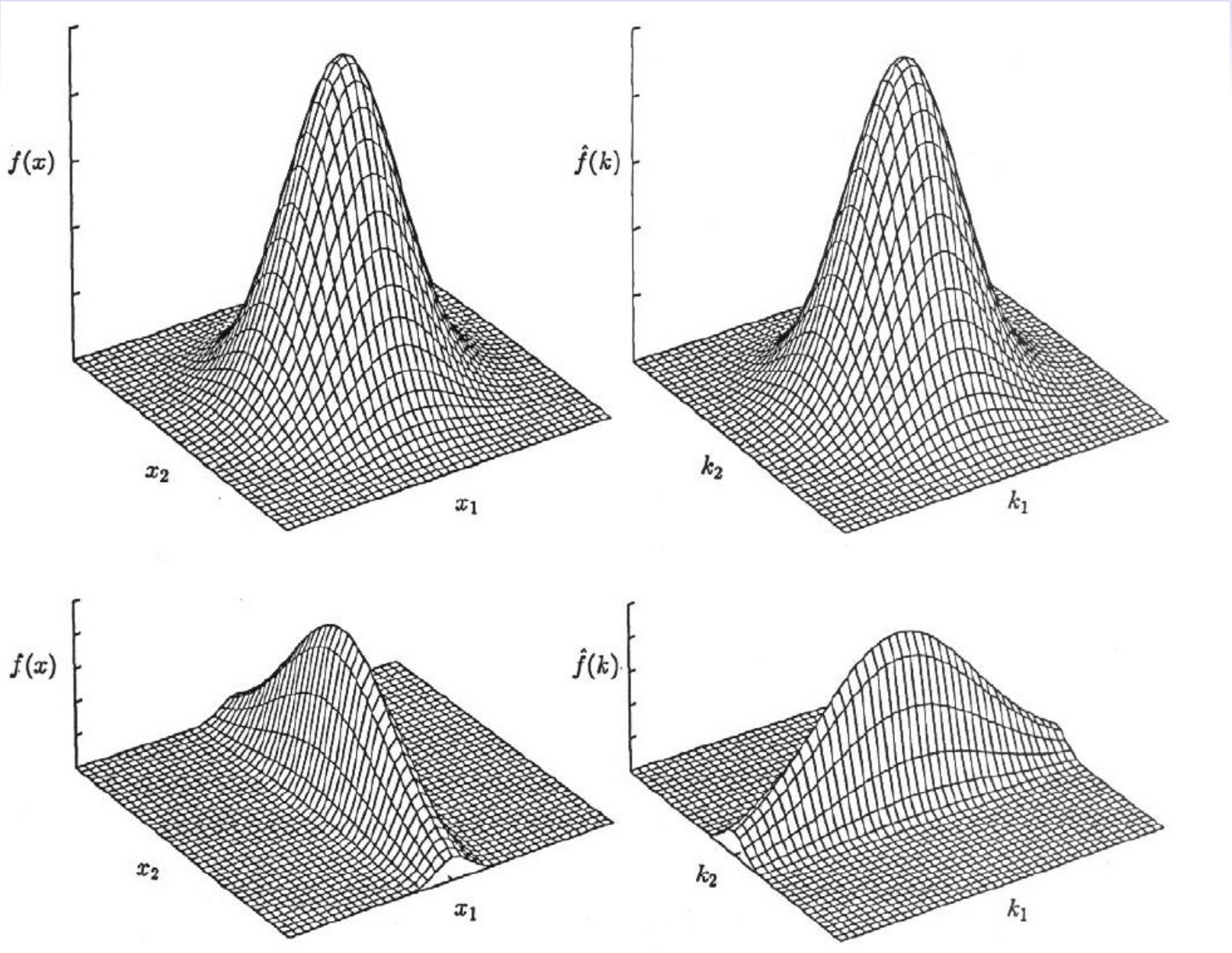
Eine Box-Funktion. Autoren: R. C. Gonzalez, R. E. Woods (1992)



Fourierspektrum der Box-Funktion. Autoren: R. C. Gonzalez, R. E. Woods (1992)



Fourierspektren einiger Funktionen. Autor: B. Jähne (1991).



Weitere Fourierspektren. Autor: B. Jähne (1991).

Eigenschaften der FT 1

- Linearität

$$F[af + bg] = aF[f] + bF[g]$$

- Ähnlichkeitssatz

$$F[f(ax, by)](u, v) = \frac{1}{|ab|} F[f]\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

Dehnung im Ortsbereich bewirkt Stauchung im Fourierbereich.

Eigenschaften der FT 2

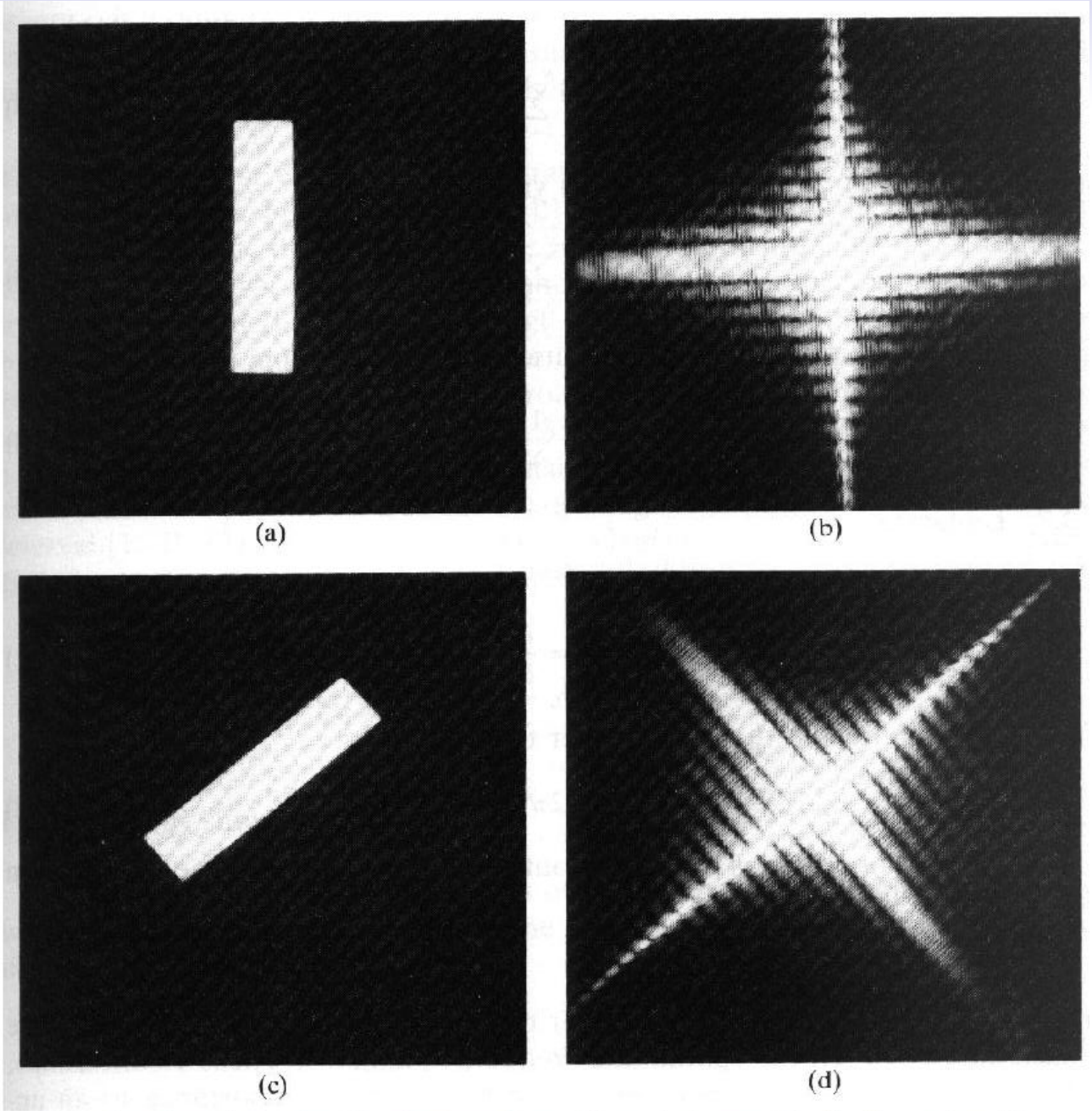
- Verschiebungssatz

$$F[f(x - x_0, y - y_0)](u, v) = e^{-i2\pi(ux_0 + vy_0)} F[f](u, v)$$

  Verschiebung im Ortsbereich bewierkt Phasendrehung im Frequenzbereich. Das *Fourierspektrum* bleibt jedoch unverändert! In diesem Sinn ist die FT translationsinvariant. Zudem ist sie rotationsinvariant.

- Ableitungssatz

$$F\left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} f(x, y)\right](u, v) = (i2\pi u)^n (i2\pi v)^m F[f](u, v)$$



Rotationsinvarianz der Fouriertransformation. Autoren: R. C. Gonzalez, R. E. Woods (1992).

Eigenschaften der FT 3

- Symmetrieeigenschaften

$$Re(\hat{f}(u,v)) = Re(\hat{f}(-u,-v))$$

$$Im(\hat{f}(u,v)) = -Im(\hat{f}(-u,-v))$$

- **Faltungssatz** Das Faltungsintegral läßt sich bequem als Multiplikation im Fourierbereich berechnen:

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$$

FT spezieller Funktionen 1

- **FT des Gaußkerns** Die FT eines Gaußkerns ist ein Gaußkern mit rezipoker Varianz:

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{-\pi(x^2+y^2)}{\sigma^2}\right) \Rightarrow \hat{f}(u,v) = \exp\left(\frac{-\pi(u^2+v^2)}{\sigma^{-2}}\right)$$

- **FT eines Deltakamms** Die FT eines unendlich ausgedehnten Kamms von Deltaimpulsen mit Peakabstand λ

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\lambda)$$

ist ein Deltakamm mit rezipokem Peakabstand:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k/\lambda)$$

Wird benötigt beim Samplen von kontinuierlichen Signale

FT spezieller Funktionen 2

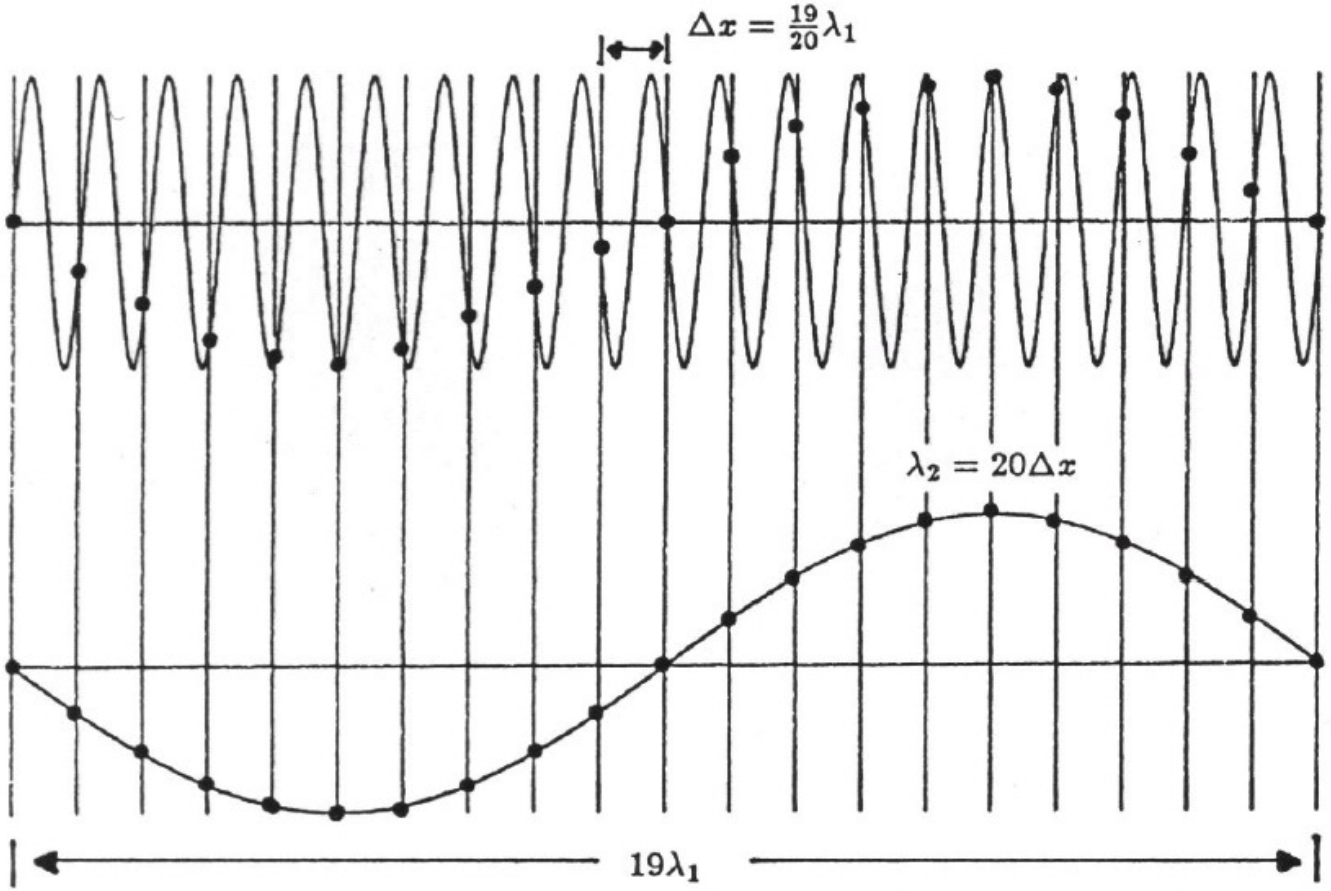
FT einer Boxfunktion $f = A$ für $x \in [0, X]$ und $f = 0$ sonst.

$$\hat{f}(u) = \frac{A}{\pi u} e^{-\pi u X} \sin(\pi u X).$$

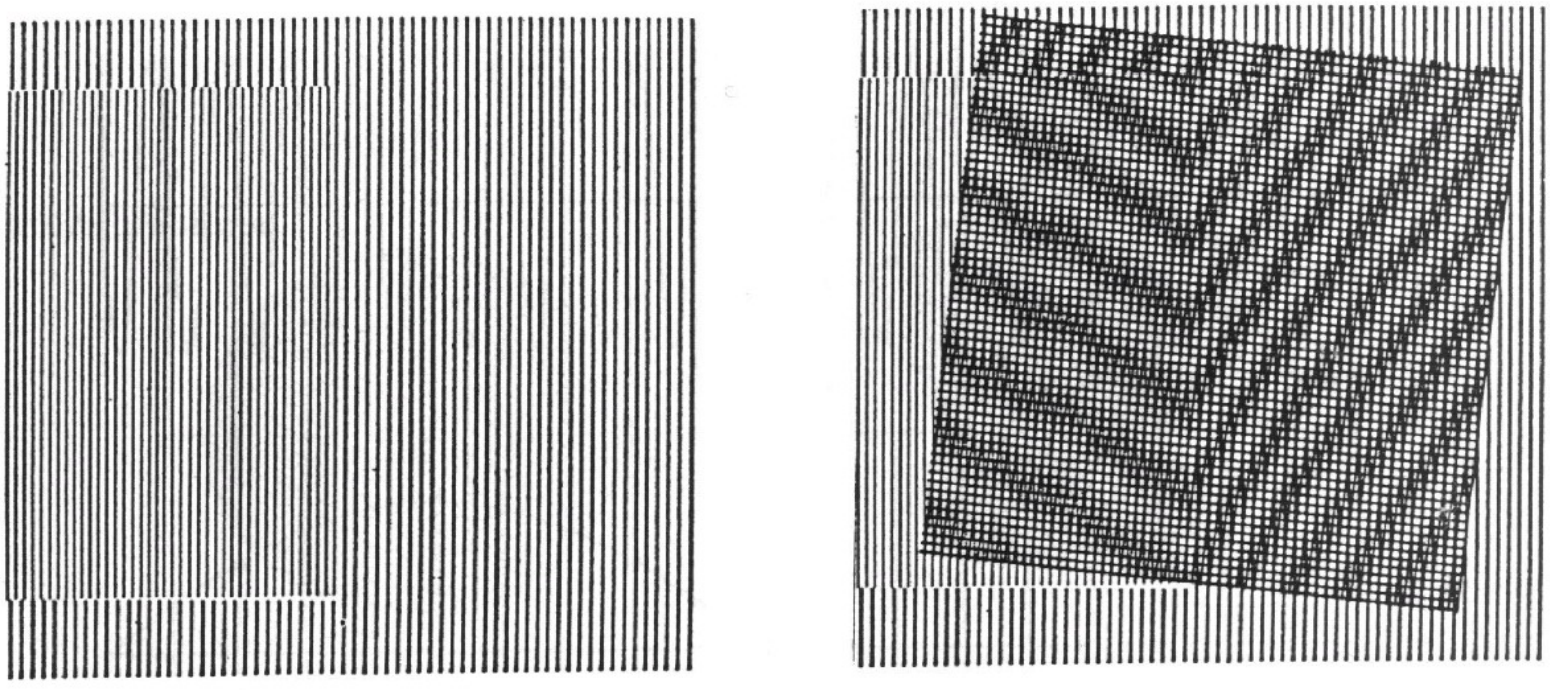
Mit $|e^{-\pi u X}| = 1$ ist Fourierspekrum $AX|sinc(\pi u X)|$.
f hat endliche Ausdehnung im Ortsbereich, $\hat{f}$ aber unendliche Ausdehnung im Frequenzbereich.

Diskrete FT 1

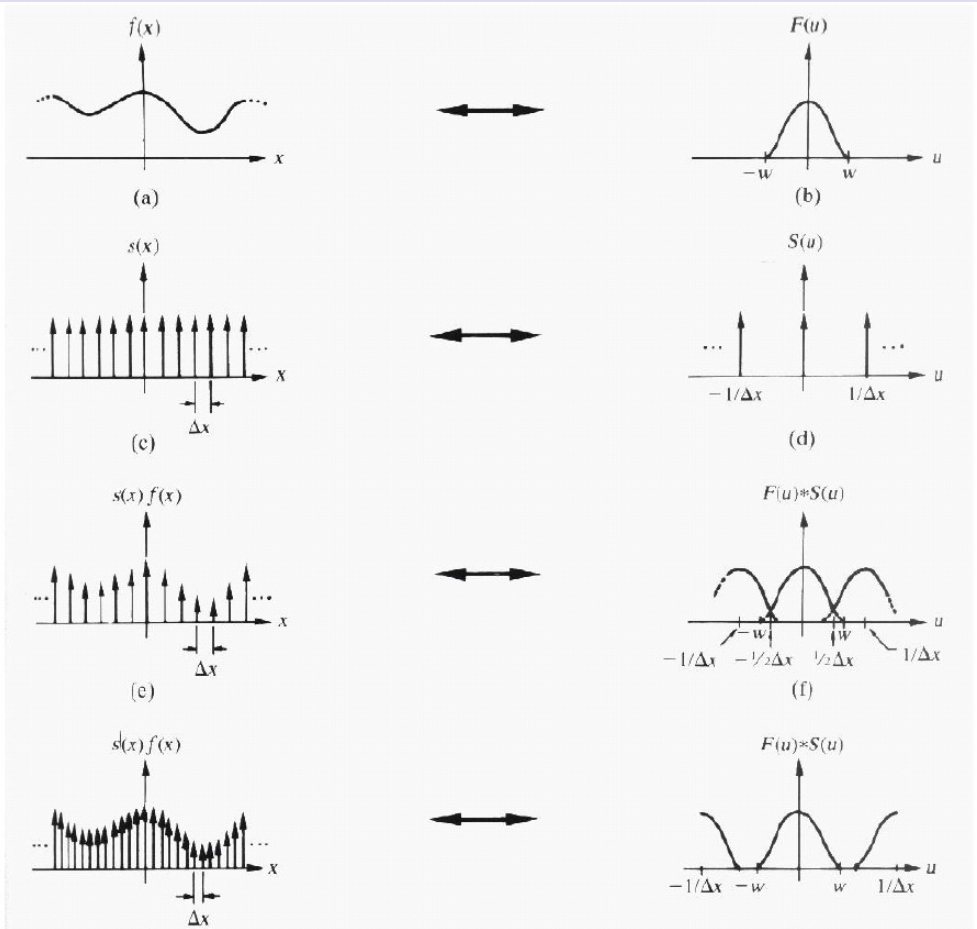
- Diskretes Analogon zu kontinuierlichen FT
- soll auf gesampelten Signalen mit M Messwerten arbeiten und sie in M Frequenzkomponenten zerlegen.



Aliasing-Effekt: Durch Abtasten mit einer zu großen Gitterweite entsteht eine verfälschte Schwingung. Autor: B. Jähne (1991).



Moiré-Effekt: Die linke Hälfte zeigt das Originalbild, zwei eindimensionale Gitter mit unterschiedlichen Abständen. Rechts wurde die Digitalisierung durch Überlagerung mit einem zweiten Gitter simuliert. Auch hier entstehen Artefakte durch Unterabtastung. Autor: B. Jähne (1991).



Erklärung des Sampling-Theorems. (a) Bandbegrenzte Funktion. (b) Fourierspektrum. (c) Deltakamm (d) Die Fouriertransformierte des Deltakamms ist ein Deltakamm mit reziproker Gitterweite. (e) Abtastung einer bandbegrenzten Funktion entspricht im Ortsbereich einer Multiplikation mit einem Deltakamm. (f) Im Fourierbereich führt dies zu einer Faltung der Fouriertransformierten aus (b) und (d). Durch Überlappung der Frequenzbänder aus unterschiedlichen Perioden kommt es zu Aliasing. (g) Verkleinerung des Samplingabstandes. (h) Im Fourierbereich rücken dadurch die Frequenzbänder auseinander und Aliasing-Effekte treten nicht mehr auf. Autoren: R. C. Gonzalez, R. E. Woods (1992).

Zusammenfassung:

- Die kontinuierliche FT analysiert das Ferquenzverhalten von Bildern
- Sie ist komplexwertig, linear und separabel
- Orts-und Fourierbereich verhalten sich rezipok bezüglich Lokaloisierung und Orientierung
- Faltungsoperationen im Ortsbereich entsprechen Mjultiplikationen im Fourierbereich
- Die FT führt Bosfunktionen in *Sinc*-Funktionen über und Gaußkerne in Gaußkerne mit rezipoker Varianz
- eine Frequenz muß mehr als zweimal pro Periode abgetastet werden, um Aliasing zu vermeiden.

Weiterführende Literatur:

- R.C.Gonzalez, R.E.Woods:*Digital Image Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, S.E. 2002
- R.Bracewell: *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, NY, 1986
- I.Amidror: *The Theory of the Moiré Phenomenon*. Kluwer, Dordrecht, 2000.