Def: (a) Die Fourier-Transf. einer 1D-Funktion $f(x)$:

$$\hat{f}(u) = \mathcal{F}[f](u) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi u x i}\, dx$$

(b) inverse 1D-Fourier-Transf.

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\, e^{i2\pi u x}\, dx$$

Bem: (1) FT ist komplexwertig $(i = \sqrt{-1})$

(2) Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i};$$

(c) Mit $\mathrm{Re}(\hat{f})$ und $\mathrm{Im}(\hat{f})$ definiert man den Betrag als Fourier-Spektrum:

$$|\hat{f}(u)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\hat{f}(u)) + \mathrm{Im}^2(\hat{f}(u))};$$

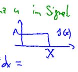
und den Winkel:

$$\varphi(\hat{f}(u)) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\,\hat{f}(u)}{\mathrm{Re}\,\hat{f}(u)} \quad \text{(bis auf Quadrante)}$$

als Phasenwinkel

(3) Meist interessiert man sich nur für F-Spektrum $|\hat{f}(u)|$ oder das Power-Spektrum $|\hat{f}(u)|^2$. Sie beschreiben den Anteil einer Frequenz u im Signal f.

Bsp: Box-Funktion



$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi u x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{X} + \int_{X}^{+\infty} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{X} A e^{-i2\pi u x}\, dx + \int_{X}^{+\infty} 0\, dx =$$

$$= 0 + \int_{0}^{X} + 0 = \int_{0}^{X} A e^{-2\pi i u x}\, dx =$$

$$= \frac{-A}{2\pi i u} \left[e^{-2\pi i u x} \right]_0^X =$$

$$= \frac{-A}{i2\pi u} \left(e^{-2\pi i u X} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{A}{i2\pi u} e^{-\pi i u X} \left(e^{-\pi i u X} - e^{\pi i u X} \right) =$$

$$= \frac{-A}{i2\pi u} e^{-\pi i u X} \left(-2i \left(\sin(\pi u X) \right) \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi u} e^{-i\pi u X} \sin(\pi u X).$$

Mit $\left| e^{-i\pi u X} \right| = 1$ (EF der kompl.-Zahl) ergibt sich als F-Spektrum:

$$|\hat{f}(u)| = \left| \frac{A}{\pi u} \right| \left| \sin(\pi u X) \right| =$$

$$= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right| =$$

$$= AX \left| \mathrm{sinc}(\pi u X) \right|.$$

$f(x)$ hat endliche Ausdehnung im Ortsbereich.

$\hat{f}(u)$ hat unendliche Ausdehnung im Frequenzbereich.

Die kontinuierliche 2D-FT.

Def: (a) FT eines 2D-kont. Signals (einer 2D Funktion) $f(x,y)$:

$$\hat{f}(u,v) = \mathcal{F}[f](u,v) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

(b) die inverse Transformation:

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x,y) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u,v)\, e^{+i2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$$

Höherdimensionale FT analog.

Wegen
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi u x}\, dx \right) e^{-i2\pi v y}\, dy$$

ist der Prozess separabel: eine m-D FT kann durch eine Abfolge von m 1-D FTen berechnet werden.

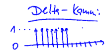
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (EF)

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| =$$

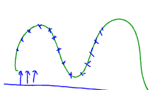
$$= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

unabhängig von φ!

Delta-Kamm:



δ-Kamm (Dirac'sche δ-Funktion)



Wie fein (oft) muss man abtasten? (Damit kein Aliasing (1D) oder Moiré-Effekt (2D) entsteht?)

Abtastsatz von Whittaker-Shannon:

Um ein bandbegrenztes Signal korrekt darstellen zu können, muss die höchste Frequenz mehr als zweimal pro Periode abgetastet werden: $\hat{f}(u) = 0$ für $|u| > W \Rightarrow \Delta x < \Delta x_{Grenz} = \frac{1}{2W}$

Bei Bildern gilt der Satz in beiden Richtungen.

Die Grenzfrequenz, ab der Aliasing-Effekte auftreten können, nennt man Nyquist-Frequenz.