Fehler des Verfahrens:

$z_n = \underbrace{y(x_n)}_{\text{exakte Lös.}} - \underbrace{y_h(x_n)}_{y_n}$

erfüllt (z.B. für ESV)

$z_{n+1} = y(x_{n+1}) -$

1 Appr.-Schritt, ausg. von exakt. $y(x$

$- [y(x_n) + h_n F(x_n, y(x_n), h_n)]$

$+ [y(x_n) + h_n F(x_n, y(x_n), h_n) -$

$- \underbrace{[y_n + h_n F(x_n, y_n, h_n)]}_{y_{n+1}}$

$= \underbrace{h_n \psi_n^{(1)}}_{\text{„neuer" Diskr.-Fehler}} + \underbrace{(z_n + h_n \psi_n^{(2)}}_{\text{Fehlerfortpflanz}}$

- $\psi_n^{(1)} := \frac{1}{h_n}\left(y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h_n \cdot F(x_n, y(x_n), h_n)\right)$

h_n

– Lokaler Diskret. Fehler (an Stelle x_n), Residuu

- $\psi_n^{(2)} := F(x_n, y(x_n), h_n) -$

$- F(x_n, y_n, h_n$

$z_n + y_n$

- Fehlerevolutionen:

$\frac{z_{n+1} - z_n}{h_n} = \psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$

Def.: Das Verfahren (3.1) ist konsistent m der Gleichung $y' = f(x, y$

wenn

$\max_{x_n \in G_h} |\psi_n^{(1)}| \to 0$

für $h \to 0$

konsitent (mind.) mit d

Bem.:

- Bei ESV ist Konsistenz für Konvergenz ausreichend und Konsist. $p \Rightarrow$ Kon.-Ord. p
- Bei MSV (später) muss das Verfahren auch stabil sein.

Bsp.: "expl. Euler-Verfahr."

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x))\,dx \approx (x_{m+1} - x_m) \cdot f(x_m, y_m)$$

Rechteckregel.

$$\Rightarrow F = f(x_m, y_m)$$

Konsistenzordnung?

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + y'(x_m) h_m + \frac{1}{2} y''(\xi) h_m^2$$

(Taylor), d.h.

$$\psi_m^{(1)} = \underbrace{-f(x_m, y(x_m)) + y'(x_m)}_{=0} + \frac{1}{2} y''(\xi) h_m = O(h_m)$$

Ordnung 1.

(wenn $|y''(\xi)| \leq C < \infty$)

Bsp: "~~impl. Euler-Verf.~~"
"Crank-Nicholson"

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x,y)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f(x_m,y_m) + f(x_{m+1},y_{m+1})\right] \cdot (x_{m+1}-x_m)$$

Trapezregel.

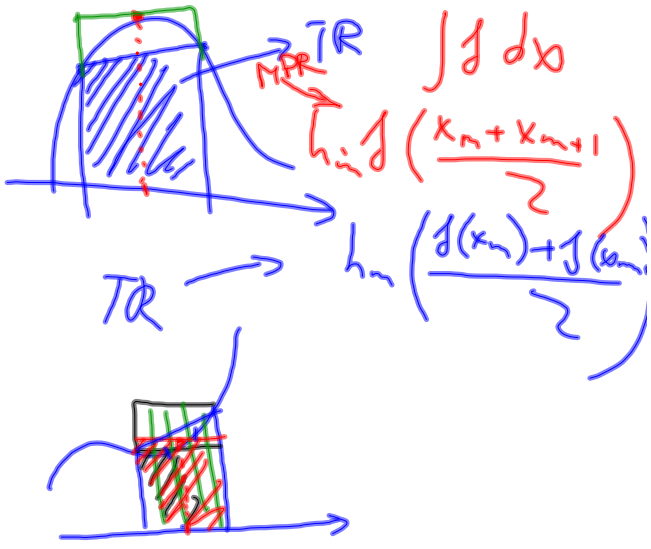
$$F(x_m,y_m,x_{m+1},y_{m+1}) = \frac{1}{2}\left[f(x_m,y_m) + f(x_{m+1},y_{m+1})\right]$$

- implizit: die nichtlineare Gl., z.B., mit Newton, ist zu lösen:

$$y_{m+1} - \frac{h_m}{2} f(x_{m+1},y_{m+1}) = y_m + \frac{h_m}{2} f(x_m,y_m)$$

$$\psi_m^{(1)} = \ldots\ldots = O(h_m^2)$$

$\longrightarrow$ Konsistenzordnung 2



Bsp: "mod. Euler-Verf." / "Runge-Kutta-Verf. der Ordnung 2"

Idee: Mittelpunkt-Formel

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx \approx h_n f\left(x_n+\tfrac{1}{2}h_n,\ y\left(x_n+\tfrac{1}{2}h_n\right)\right)$$

$$y\left(x_n+\tfrac{1}{2}h_n\right) \approx y_{n+\frac{1}{2}} =$$

$$= y_n + \tfrac{1}{2}h_n f(x_n,y_n)$$

← expl. Euler-Schritt

$$F = f\left(x_n+\tfrac{1}{2}h_n,\ y_n+\tfrac{1}{2}h_n f(x_n,y_n)\right)$$

→ explizit.

Konsistenzordnung:

$$\psi_n^{(1)} = -f\left(x_n+\tfrac{1}{2}h_n,\ y(x_n)+\tfrac{1}{2}h_n f(x_n,y(x_n))\right) + \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h_n} =$$

$$= -f(x_n,y(x_n)) - \tfrac{1}{2}h_n f_x(x_n,y(x_n)) - \tfrac{1}{2}h_n f(x_n,y(x_n))\, f_y(x_n,y(x_n)) + y'(x_n) + \tfrac{1}{2}h_n y''(x_n) + O(h_n^2) = O(h_n^2)$$

wg.

$$y''(x_n) = \left(f(x_n,y(x_n))\right)' =$$

$$= f_x(x_n,y(x_n)) + f_y(x_n,y(x_n))\cdot f(x_n,y(x_n))$$

→ Konsistenzordnung 2

2 Funktionsaufrufe

explizit.

Algorithmische Realisierung

$$k_1 := f(x_m, y_m)$$

$$k_2 := f(x_m + \tfrac{1}{2}h_m, y_m + \tfrac{1}{2}h_m k_1)$$

$$y_{m+1} = y_m + h_m \cdot k_2$$

Def: Sei $s \in \mathbb{N}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & \ddots & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{s1} & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

eine reelle Matrix, und

$$c = (0, c_2, c_3, \ldots, c_s)^T \in \mathbb{R}^s$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_s)^T \in \mathbb{R}^s$$

zwei reelle Vektoren.

Dann heißt das Verfahren

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + c_2 h_m, y_m + h_m a_{21} k_1)$$

.....

$$k_s = f(x_m + c_s h_m, y_m + h_m (a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} \cdot k_{s-1}))$$

$$y_{m+1} = y_m + h_m (b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_s k_s)$$

ein s-Stufiges Runge-Kutta Verfahren (s. Funktionsaufrufe).

Bsp. 1 : expl. Euler-Verf.:

$s = 1$, $A = 0$

$c = 0$, $b = 1$

Bsp. 2: "modif. Euler" ≡ "R.-K.-Verfahren 2. Ordnung"

$s = 2$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

$c = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$;

$b = (0, 1)^T$;

Schreibweise:

$\left(\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}\right)$ – "Butcher-Schema" (1964)

d.h.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

← R.-K.-2. Ord.