Bsp.

$y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

- L-Bedingung erfüllt mit $L = \|A\|$
- Allg. Lösung der Gl $y' = Ay$

1x1:

$y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$

$y \neq 0$

($y \equiv 0$ eine Lösung)

Tdv: $\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$

$c + \ln|y| = kx$, $c \in \mathbb{R}$

$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists b > 0$: $\ln b = c$

$\ln b + \ln|y| = kx$

$\ln b|y| = kx$

$\forall b > 0\ \exists q \neq 0$: $b = |q|$

$\Rightarrow \ln|qy| = kx$

$\Rightarrow |qy| = e^{kx}$

$|y| = \frac{1}{|q|} e^{kx}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{$

$y = \frac{1}{q} e^{kx}$, $q \in \mathbb{R} \setminus$

$\frac{1}{q} \neq 0\ \forall q \in \mathbb{R} \setminus$

$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$d = \frac{1}{q}$.

$y = d e^{kx}$, $d \in \mathbb{R} \setminus$

$y = 0$ (mit $d = 0$)

$y = \tilde{c} \cdot e^{kx}$, $\tilde{c} \in \mathbb{R}$

Allgemeine Lösung der Gleichung

- Wenn n-D Fall gegeben mit $n > 1$:
  - Bestimme EWe (Eigenwerte) der Matrix und

Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

(1) nur für quadr. Matrizen.
(2) nicht alle quad. nxn Matrizen besitzen n (bis auf Vielfachheit) EWe mit n EVen.

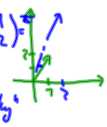
Def: (EW und EV)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (reg). Unter Verbehalt der Existenz heißen die nichttriviale Lösungen der Gleichung

$Av = \lambda v$ (v bestimmen, λ bekannt)

λ - Eigenwert(e) von A mit dazugehörigen Eigenvektoren v.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 28 \end{pmatrix}$

"Lineare Abbildung"



Bem. Falls es eine Basis aus EVen gibt, so wird die Matrix bzgl dieser Basis in der Form

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

dargestellt.

Berechnung der EWe und EVe

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$Av = \lambda v$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$Av - \lambda v = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$\lambda v = I(\lambda v) = \lambda(Iv) = \lambda(\lambda I)v = (\lambda I)v$ (I - neutrales Element bzgl Matrixmultiplikation)

$Av - \lambda I v = 0$ | $Iv = v$

$(A - \lambda I)v = 0$ (*)

(*) ist LGS mit der Systemmatrix $(A - \lambda I)$ und unbekanntem Vektor v.
(*) ist homogen.

$\Downarrow$

Eine Lösung ist die triviale Lösung $v = 0 \in \mathbb{R}^n$ (immer!)

Wir suchen aber $v \neq 0$ (nichttriviale Lösungen)

$\Rightarrow$ (*) muß mehrere Lösungen besitzen.

$\Downarrow$

(KW) $\det(A - \lambda I) = 0$

(**) heißt die charakteristische Gleichung der Matrix A.

und $\det(A - \lambda I)$ das char. Polynom von A

$\det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- $\det(A - \lambda I) = 0$ lösen (λ unbekannt, I bekannt)

λ — Nullstellen des charakt. Polynoms (Grad n)
$\Rightarrow$ n (komplexe/reelle) Lösungen, maximal n reelle Lösungen

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$\forall i = 1, \ldots, n$:

$(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$

λ_i bekannt, lösen, v_i bestimmen, $\neq 0$

Zurück zum Bsp:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

Eval, Evec:

- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 10 & 9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (0-\lambda)(9-\lambda) - 10 =$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda - 10,$$

$\lambda^2 - 9\lambda - 10 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 10$

- Evec:

$\lambda_1 = -1$:

$(A + 1I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} +1 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$v_1 + v_2 = 0$

$10v_1 + 10v_2 = 0$

$v_1 = -v_2$

$v_2 = \mu \in \mathbb{R}$

$v_1 = -\mu$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\mu \longrightarrow$ Eigenraum zu EW $\lambda_1 = -1$

$\Rightarrow$ z.B. $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(μ - Parameter)

Eigenvektoren sind nur Repräsentanten des entspr. Eigenraums, "Basis".

- $\lambda = 10$:

$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}v^{(2)} = 0$, $v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$

$10v_1^{(2)} - v_2^{(2)} = 0$

$v_1^{(2)} = \mu$

$v_2^{(2)} = 10\mu$

z.B. für $\mu = 1$: $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Also: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} = A$ besitzt 2 EWe $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 10$ mit entsp. zugehörigen Evec $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

D.h. die DGl $y' = Ay$ besitzt die allg. Lösung:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} v_2 =$$

$$= c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10x}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{10x} \\ -c_1 e^{-x} + 10c_2 e^{10x} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung vom AWP $(y' = Ay,\ y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix})$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ -c_1 e^0 + 10c_2 e^0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 10c_2 - c_1 \end{pmatrix}$$

z.B. "+": $\alpha - \alpha = c_1 - c_1 + c_2 + 10c_2$

$\Rightarrow 11c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = c_1 + c_2 = c_1$

$\Rightarrow c_1 = \alpha$

$y_{AWP}(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-x} \\ -\alpha e^{-x} \end{pmatrix}$

Das Problem hier:

$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in$ Eigenraum (-1)

$\Rightarrow$ kleine Änderung der AB
$\longrightarrow$ große Änderung der Lösg.
$\longrightarrow$ Numerisches Problem.

z.B.: $y_\varepsilon(0) = \begin{pmatrix} \alpha+\varepsilon \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow y_\varepsilon(x) = \left(\alpha + \frac{10}{11}\varepsilon\right) e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{11} e^{10x} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Störung

$\Rightarrow \alpha = 1, \varepsilon = 10^{-8}$
$\longrightarrow$ rel. Fehler von $y_{10^{-8}}(x=2{,}5) \approx 800$
Instabilität