Satz: (Stabilität bzgl. der rechten Seite):

Erfüllt die stetige Fnktn. $f_1(x,y)$ auf $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine L-Bedingung und gelte für $f_2(x,y)$:

$|f_1(x,y) - f_2(x,y)| \leq \varepsilon$

$\forall (x,y) \in G$, dann gilt für die Lösungen

$y_1' = f_1(x,y_1)$, $y_1(x_0) = y_0$

$y_2' = f_2(x,y_2)$, $y_2(x_0) = y_0$

im Intervall $[x_0, X]$ die Abschätzung:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \varepsilon (X - x_0) e^{L(x-x_0)}$$

Bem: zusätzliche Stetigkeit und L-Bedingung an f_2 $\Rightarrow$ y_2 eindeutig.

22.2. Picard-Lindelöf Iteration

P.L. Iteration: explizit

AWP: $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

Startfunktion:

$y(x_0) = y_0 \equiv \text{const}$

Iterationsvorschrift:

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\,dt$$

$$y' = f(x,y)$$

$$dy = f(x,y)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$$

$$y\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t,y)\,dt$$

($y(x_0) = y_0$; $x \to x$)

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\,dt$$

Satz: Die Fkt. $f(x,y)$ sei auf G stetig und erfüllt L-Bed. bzgl. y. Dann konvergiert die Funktionen-Folge $y_k(t)$ des P.-L.-I. auf einen Intervall $[x_0, x_0+\varepsilon]$ gleichmäßig zur Lösung des AWPs.

Taylor-Reihe der AWP-Lösung

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \dots\dots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k$$

a) $k=1$: Euler

b) Aus $y' = f(x,y)$

$$y'' = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'$$

$$y''(x_0) = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot f(x_0,y_0)$$

y'''

$y'(x) = f(x, y(x_0))$

$y' = \sin(x\cdot y^2)$

$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}\cdot f^2 + f_y(f_x + f_y f)$

. . . . . .

→ Nur mit Hilfe von Computer (CAS) möglich (symbol. Formelmanipulation)

→ Falls $f(x,y)$ analytisch in einer Umgebung von (x_0,y_0) ist → Konvergenz der Taylor-Reihe für $h \le h_0$

Stabilität und Konvergenz der Euler-Methode:

Satz: (Stabilität):

Sei $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = X$ eine feste Diskretisierung des Intervalls $[x_0, X]$, und $y_h(x)$, $z_h(x)$ die Euler'schen Polygonzüge für

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

$z' = f(x,z)$, $z(x_0) = z_0$

Wenn die Funktion $f(x,y)$ eine L-Bedingung auf G erfüllt, dann gilt $\forall x \in [x_0, X]$:

$$|y_h(x) - z_h(x)| \leq e^{L(x-x_0)} |z_0 - y_0|$$

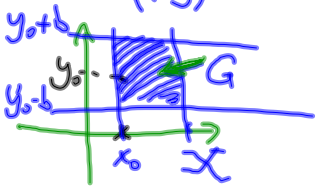
$y' = \sin x$, $y(x_0) = 1$

$z' = \sin x$, $z(x_0) = 2$

$x_0 = 3{,}14012$

Satz: Die Funktion $f(x,y)$ sei auf dem Gebiet

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \le x \le X,\ |y - y_0| \le b\}$



stetig, $|f(x,y)| \le A$ und erfülle auf G L-Bedingung bzgl. y. Dann gilt für $X - x_0 \le \frac{b}{A}$:

a) Die Eulerschen Polygonzüge $y_h(x)$ konvergieren für $h \to 0$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi(x)$;

b) $\varphi(x)$ ist stetig diffbar und erfüllt die Gleichung

$\varphi' = f(x, \varphi)$,

$\varphi(x_0) = y_0$

$x_0 \le x \le X$.

Satz (Konvergenzabschätzung):

Sei $f(x,y)$ auf G stetig und partiell diffbar, mit:

$|f_x| \leq M, \quad |f_y| \leq L, \quad |f| \leq A$

$\Rightarrow$ Das Euler'sche Polygonzugverfahren konvergiert, und der Fehler $y(x) - y_h(x)$ genügt der folgenden Abschätzung

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{M + AL}{L} \cdot \left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \cdot h = O(h)$$

