1. Lineare GSe

Zu lösen: n Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n,1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

oder in Matrixform

(*) $$Ax = b\,,\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n$$

A, b gegeben, x gesucht

<u>Lösbarkeitssatz</u>: Das GS(*) ist genau dann für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist ($\equiv \det A \neq 0$)

2. Gauß'sche Eliminationsmet.

x_1 aus Zeile 2 – n eliminie.

$$a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)}$$

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}$$

$$a_{32}^{(1)} x_2 + \ldots\ldots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n,2}^{(1)} x_2 + \ldots\ldots + a_{n,n}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}$$

Sei $a_{11}^{(0)} \neq 0$, $a_{11}^{(0)} = a_{11}$. Um $a_{i1} x_1$ für $i = 2, \ldots, n$ zu eliminieren, substr. von der Zeile i ein Vielfaches der Zeile 1:

$$\underline{(a_{i1} - l_{i1} a_{11})} x_1 + (a_{i2} - l_{i1} a_{12}) x_2 + \dots + (a_{in} - l_{i1} a_{1n}) x_n = b_i - l_{i1} b_1,$$

$$i = 2, \dots, n$$

Ist nun $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, ergibt sich $A^{(1)}$ mit

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1} a_{1j} = a_{ij}^{(0)} - l_{i1} a_{1j}^{(0)}$$

und $b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - l_{i1} b_1^{(0)} =$

$$= b_i - l_{i1} b_1$$

für $2 \leq i,j \leq n$

($i=1 \rightarrow$ 1. Zeile $\rightarrow$ unveränd.)

($j=1 \rightarrow$ 1. Sp.: Nullen, bis auf a_{11})

Das Element $\underline{a_{11}^{(0)} \neq 0}$ heißt **Pivotelement**, die 1. Zeile Pivotzeile

In den Zeilen 2 bis n bleibt eine $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ Matrix. Wenden wir auf die Restmatrix die El.-Meth. erneut an, so erhalten wir eine Folge:

$$A = A^{(0)} \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow A^{(n-1)} = R$$

$$R = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1}^{(0)} & a_{1,n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

R ist eine obere Dreiecksmatrix (Δ-Matrix)

Der Übergang

$$A^{(k-1)}, b^{(k-1)} \longrightarrow A^{(k)}, b^{(k)}$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

läßt sich als Multiplikation mit der Matrix L_k schreiben:

k-te Spalte

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & -\ell_{k-1,k} & \ddots & & \\ & & -\ell_{k,k} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \\ & & -\ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$A^{(k)} = L_k \cdot A^{(k-1)} \qquad k = 1, \dots, n-1$$
$$b^{(k)} = L_k \cdot b^{(k-1)}$$

L_k ist die sog. elementare Transformationsmatrix, Frobenius-Matrix

Damit ergibt sich:

$$R = A^{(n-1)} = L_{n-1} \cdot A^{(n-2)} =$$

$$= L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot A^{(n-3)} =$$

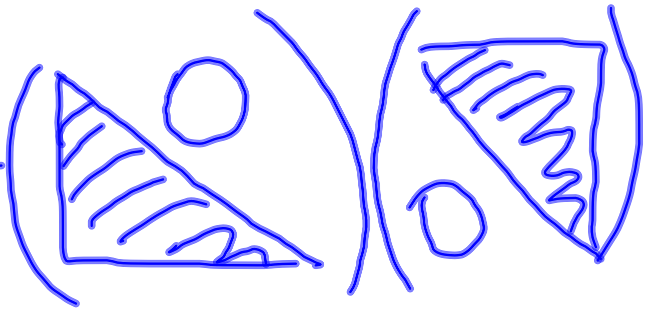
$$= L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdot A^{(n-4)} =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \left(\prod_{j=n-1}^{1} L_j \right) A^{(0)} = L^{-1} \cdot A^{(0)} =$$

$$= L^{-1} \cdot A .$$

$$A = L \cdot R$$

$\Longrightarrow A = L \cdot R =$ 

<u>Bemerkung 2.1</u>: Für das Produkt $L_1^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1}$ gilt:

$$L = L_1^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L \cdot R$$

$$Ax = b$$

$$(LR)x = b$$

$$L(Rx) = b$$

$$\begin{cases} Ly = b & \quad 2n \text{ Gl} \\ Rx = y & \quad 2n \text{ Var} \end{cases}$$

◺ $y = b$

◹ $x = y$

$$Ly = b$$

$$y_1 = b_1$$

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 = b_1 \\ l_{21} y_1 + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{l_{22}} y_2 = l_{21} y_1 + y_2 = b_2 \\ \quad y_2 = b_2 - l_{21} \cdot b_1 \\ \ldots\ldots \\ l_{n1} y_1 + l_{n2} y_2 + \ldots\ldots + 1 \cdot y_n = b_n \end{cases}$$

$\longrightarrow$ y in einem (linearen) Durchgang.

$$Rx = y$$

$$r_{11}x_1 + \dots + r_{1n}x_n = y_1$$

$$0 + r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n = y_2$$

$$\ddots$$

$$0 + r_{nn}x_n = y_n$$

$$x_n = y_n / r_{nn}$$

$\to x$ in 1. Zeile (l.h.)

Durchgang von unten nach Oben berechnet

Fragen:

a) Durchführbarkeit (Existenz)?

b) algorithmische Realisierung?

c) numerischer Aufwand?

d) Stabilität?

<u>Def: 2.2:</u> Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt streng regulär, wenn alle ihre führenden Hauptminoren

$$A_1 = \det(a_{11})$$

$$A_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \det A$$

ungleich Null sind

$$(A_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n)$$

Bsp:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Delta_1 = \det(1) = 1$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -4$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Delta_4 = \det A$$

A nicht streng regulär

Satz 7.3: Die strenge Regularität der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist für die Existenz der Zerlegung $A = L \cdot R$ (L - unt. Δ - Matr., R - obere Δ - Matrix) notwendig **und** hinreichend.

Die LR-Zerlegung ist mit $l_{jj} = 1$, $r_{jj} \neq 0$, $\forall 1 \leq j \leq n$

eindeutig.

A - regulär $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

(Zeilen lin. unabhängig,

Spalten lin. unabhängig,

A hat vollen Rang)

$\Longrightarrow Ax = b \ \forall b$ eindeutig lösbar.

A streng regulär $\Longrightarrow A$ reg.

$\not\Longleftarrow$

$$\Delta_n = \det A \neq 0$$

$$\Delta_1 \neq 0$$

$$\Delta_2 \neq 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{n-1} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis des Satzes

(Teilbeweis):

Notwendigkeit:

Es existiere $A = LR \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a_{11}^{(0)} \neq 0, \; a_{22}^{(1)} \neq 0, \ldots\ldots, a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, d.h.

alle Pivot-El'e sind $\neq 0$.

Es gilt aber

$$\Delta_k = a_{1,1}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k,k}^{(k-1)},$$

$k = 1, \ldots, n$ (elementare Transform! $\rightarrow$ veränd. det nicht)

$\Longrightarrow A$ streng regulär.

Eindeutigkeit:

Sei $A = L_1 R_1$ und
$A = L_2 R_2$

Dann gilt:

$$L_1 = A R_1^{-1}$$
$$L_2 = A R_2^{-1}$$
$$\underbrace{L_1^{-1} L_2}_{\text{Untere } \Delta\text{-Matr.}} = \underbrace{R_1 R_2^{-1}}_{\text{Obere } \Delta\text{-Matr.}}$$

$$\Longrightarrow L_1^{-1} L_2 = R_1 R_2^{-1} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

Weiter gilt:

$$(L_1^{-1} \cdot L_2)_{jj} = d_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\Longrightarrow L_1^{-1} L_2 = I,$$
$$R_1 \cdot R_2^{-1} = I$$

$$\Longrightarrow L_1 = L_2$$
$$R_1 = R_2$$

$\blacksquare$

$l_{jj} = 1$ erzwingt die Eindeutigkeit, sonst (i. A.) hat das GS

$A = LR$ n^2 Gl'en

mit $\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 = n^2 + n$

Unbekannten. $\Longrightarrow$

beliebig viele Lösungen.

Folgerung 1:

$$\det A = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$$

$$\det A = \det(LR) =$$

$$= \underset{\text{Δ-Matr.}}{\det L} \cdot \underset{\text{Δ-Matr}}{\det R} =$$

$$= (1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1) \cdot (r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn})$$

$$= r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn}.$$

$$\det A = \det R$$

Folgerung 2:

Die führende Hauptminoren Δ_k, $k=1,\dots,n$ sind genau dann positiv, wenn $r_{kk} > 0$, $k=1,\dots,n$ gilt.

Folgerung 3: Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ streng regulär. Dann existiert eine

$$A = L \cdot D L^T\text{-Zerlegung}$$

mit $D = \operatorname{diag}(R)$

(regulär):

$$A = LR = L D D^{-1} R =$$

$$= A^T = \underbrace{(R^T D^{-1})}_{\text{untere } \Delta\text{-Matr.}} \underbrace{(D L^T)}_{\text{obere } \Delta\text{-M.}}$$

$R^T D^{-1}$ ist eine untere Δ-Matrix mit 1 auf der Diagonale.

Eindeutigkeit der LR-Zerl.

$$\Longrightarrow R^T D^{-1} = L$$

$$\Longrightarrow A = L D L^T$$

Folgerung 4: Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine sym. streng reguläre Matrix mit $\Delta_k > 0$, $k = 1, \dots, n$

Es existiert eine eindeutige Zerlegung $A = CC^T$, C eine untere Δ-Matrix.

$$A = LDL^T = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{C} \cdot \underbrace{D^{\frac{1}{2}} L^T}_{C^T}$$

$$C = L \cdot \operatorname{diag}(\sqrt{r_{11}}, \sqrt{r_{22}}, \dots, \sqrt{r_{nn}})$$

Def: Die Zerlegung

$A = CC^T$ heißt

Cholesky-Zerlegung