Numerische Lösung der lGS
HTWdS SS 10
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) *Ist das Produkt zweier symmetrischer Matrizen stets symmetrisch?*

b) *Eine reelle symmetrische Matrix A heißt positiv definit, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt*

$$(Ax, x) > 0,$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das Standardskalprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. $\det A > 0$

2. $a_{ii} > 0$ *für* $i = 1, ..., n$

Aufgabe 2

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, ..., n$ mit $i < j$. eine Matrix heißt obere Dreiecksmatrix, wenn ihre Transponierte untere Dreiecksmatrix ist.

a) *Zeigen Sie, daß das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.*

b) *Woran erkennt man, daß eine Dreiecksmatrix invertierebar ist? Welche Gestalt hat die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix?*

Aufgabe 3

Führen Sie anhand des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 & 2 \\ 6 & 15 & 56 & 47 & 13 \\ 2 & 16 & 28 & 35 & 15 \\ 7 & 17 & 77 & 62 & 65 \\ 3 & 12 & 39 & 47 & 91 \end{pmatrix}$$

das Gaußsche Eliminationsverfahren aus der Vorlesung durch. Geben Sie dabei alle auftretenden Zwischenmatrizen sowie die entsprechende Frobeniusmatrizen zur Zeilenmanipulation an.

Lösen sie mittels der so gewonnenen Zerlegung der Matrix das lineare Gleichungssystem

$$Ax = (12,\ 75,\ 45,\ 149,\ 133)^T.$$

Aufgabe 4

Sei $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n$ *eine untere Bandmatrix, d.h.* $l_{ij} = 0$ *für* $i < j$ *und* $i > j + m_l$ *mit einem* $m_l \geq 0$. *Sei* $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ *eine obere Bandmatrix, d.h.* $r_{ij} = 0$ *für* $j < i$ *und* $j > i + m_r$ *mit einem* $m_r \geq 0$.

Was kann man hinsichtlich der Bandstruktur des Produktes LR sagen? Beweis?