

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Betrachten Sie die reguläre Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ b_i & i = j - 1 \\ c_{i-1} & i = j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Zahlen $d_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Leiten Sie für diese Klasse von Matrizen ein Verfahren her, das mit höchstens $O(4n)$ wesentlichen Operationen (Multiplikationen bzw. Divisionen) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, warum in der unteren Dreiecksmatrix L nur die Hauptdiagonale bzw. die untere Nebendiagonale besetzt ist. Ähnliches gilt für die Matrix R der LR-Zerlegung $A = LR$.

Aufgabe 2

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) wird **Matrixnorm** genannt, wenn sie die üblichen Normeigenschaften besitzt:

$$i) \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0, \quad ii) \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad iii) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

a) Weisen sie nach, daß folgende Abbildungen tatsächlich Matrixnormen sind:

1) Die **Zeilen-** bzw. **Spaltensummennorm**

$$\|A\|_r := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_c := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

2) Die **Schurnorm** ($A \in \mathbb{K}^{n \times n}$)

$$\|A\|_s := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3) Die **Gesamtnorm**

$$\|A\|_G := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

4) und die (wohldefinierte?) **Spektralnorm**

$$\|A\|_\sigma := \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^*A\}$$

$$(A^* = \bar{A}^T)$$

b) Eine Matrixnorm heißt **submultiplikativ**, wenn für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ stets gilt:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Überprüfen Sie die oben angegebenen Matrixnormen auf diese Eigenschaft.

c) Sei $\|\cdot\|_V$ eine Vektornorm auf \mathbb{K}^n . Die der Vektornorm $\|\cdot\|_V$ **zugeordnete Matrixnorm** ist definiert durch

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}.$$

Zeigen Sie, daß hierdurch wirklich eine Matrixnorm definiert ist und daß die Spektralnorm der euklidischen Vektornorm zugeordnet ist. Ist die zugeordnete Norm stets submultiplikativ? Bestimmen Sie die zugeordneten Normen zu den Vektornormen

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Aufgabe 3

Wenden Sie den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 28 & 16 \\ 12 & 10 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

an. Geben Sie alle dabei auftretenden Zwischenmatrizen an.

Lösen sie mittels der so gewonnenen Zerlegung der Matrix das lineare Gleichungssystem

$$Ax = (12, 75, 45, 149, 133)^T.$$