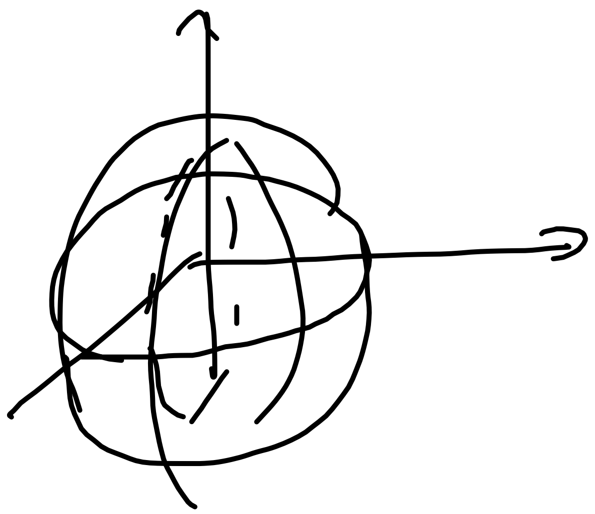
# Ableitungen der Funktionen in n Veränderlichen:

$$x^2+y^2+z^2=1$$



$$x^2+y^2+z^2=f(x,y,z)$$

3 Veränderlichen

# Partielle Ableitungen

## Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$y = f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$

$P = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$

$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots\ldots, x_n^0)$

$P$ – bel. Punkt im $n$-dim Raum;

$P_0$ – fester Punkt im $n$-dim Raum;

1D:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

**Def:** Der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots x_n^0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots x_n^0) - f(P_0)}{h} =$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)$$

heißt partielle Ableitung 1. Ordnung von $f$ nach $x_k$ an der Stelle $P_0$.

Weitere Bezeichnungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{x_k} = \partial f_{x_k}$$

Berechnung: Man leitet $f$ nach $x_k$ ab und tut dabei so, als ob alle andere Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ Konstanten wären. Anschließend setzt man $P_0$ erh.

"Konstanten bzgl. $x_k$, - von $x_k$ unabhängige Variablen"

Bsp: 1) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

2) $g(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_3+x_2^2$

$P_0 = (1,1,1)$

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(z^2)$$

$$= 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 2 \cdot 1 = 2$$

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_3 + x_2^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 3x_3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3} = 3x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(P_0) = 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(P_0) = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}(P_0) = 3$$

# Partielle Ableitungen höherer Ordnung:

## 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P) = f_{x_i x_i}(P) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(P);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(P) = f_{x_i x_j}$$

# Analog: Ableitungen n-ter Ordnung:

$$f_{x_i x_i \ldots x_i}(p) = \frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(p)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ldots\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)\ldots\right)\right)(p)$$

Bsp: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_3 - x_2^2$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = f_{x_3 x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_1) = 3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1} = g_{x_1 x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} g\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(3x_3\right) = 3$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3 \partial x_1}$$

Ist das immer so, daß die Reihenfolge der Ableitungsvariablen keine Rolle spielt?

# Satz von Schwarz:

Ist eine Funktion $f$ in einer Umgebung $U$ des Punktes $P$ $k$-mal partiell differenzierbar und sind alle $k$-ten Ableitungen in $U$ stetig, so ist die

Differentiationsreihenfolge in allen $q$-ten partiellen Ableitungen mit $q \leq k$ vertauschbar.

Für die gemischte partielle Ableitungen 2. bzw. 3. Ordnung einer Funktion $z = f(x,y)$ gilt somit unter der Voraussetzungen des Satzes von

Schwarz:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Bem:

(1) Für die in den Anwendungen benötigten Funktionen ist der Satz von Schwarz in der Regel gültig.

(2) In der Praxis bringt der Satz von Schwarz einen Zeit- und Aufwand-gewinn.

Bsp.:

$$f(x,y,z) = x^3 e^y + x^2 + z e^{(xy)};$$

$$f_{xyz}, \quad f_{xzy} - ?$$

$$f_{zyx}$$

$$f_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{y}\left(\frac{\partial}{x} f\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \cdot 3x^2 + 2x + zy e^{xy}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 e^y + 0 + z\left(e^{xy} + yx e^{xy}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 e^y + z e^{xy} + xyz e^{xy}\right) =$$

$$= 0 + e^{xy} + xye^{xy} =$$

$$= (1+xy)\,e^{xy}.$$

Laut Satz von Schwarz

ist aber

$$f_{xyz} = f_{zyx} = f_{zxy};$$

Und:

$$f_{zxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(x^3 e^y + x^2 + z e^{xy}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(0 + 0 + e^{xy}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} \cdot y\right) =$$

$$= e^{xy} + xye^{xy} =$$

$$= (1+xy)\, e^{xy}$$

Falls Satz von Schwarz gilt, erst nach der bei wenigen Summanden in der Funktion vertretenen Variable ableiten (Ergebnis hängt von der Reihenfolge nicht ab!)

**Der Gradient von $f$ in $P_0$:**

**Def:** Als Gradient von $f$ an der Stelle $P_0$ bezeichnet man den Vektor der partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $f$ in $P_0$:

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

Klausuren:

Mathe 3: 12.8.

Ang. Math: 26.9.

Mathe 3 → Vorlesung

für AM!