Dämpfungssatz

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$

$$g(t) := e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)$$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)](\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)\right) e^{-j\omega t} \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{jt(\omega_0 - \omega)}\, dt \; =$$

$$-\alpha := \omega_0 - \omega \; ; \quad \alpha = \omega - \omega_0$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-jt\alpha}\, dt}_{= F(\alpha)} =$$

$$= F(\alpha) = F(\omega - \omega_0).$$

Satz: Ist für die Originalfunktion $f(t)$ die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ "bekannt", so gilt für die exponentiell gedämpfte Funktion $g(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)$:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)](\omega) =$$

$$= F(\omega - \omega_0)$$

Bsp!

$$g(t) = e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$f(t) = e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \; F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$g(t) = e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(e^{-at} \cdot e^{j\omega_0 t} - e^{-at} \cdot e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$= \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} f(t) -$$

$$- \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} f(t);$$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} f(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} f(t)\right](\omega) =$$

Lineen ist

$$= \frac{1}{2j} \mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t} f(t)\right] -$$

$$- \frac{1}{2j} \mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t} f(t)\right] =$$

Dämpfungssatz

$$= \frac{1}{2j} F(\omega - \omega_0) -$$

$$- \frac{1}{2j} F\left(\omega - (-\omega_0)\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{a + j(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{a + j(\omega + \omega_0)}\right) =$$

$= \ldots\ldots =$

$$= \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}.$$

Ableitungssatz für die Originalfunktion:

(1) $\mathcal{F}[f'(t)](\omega) =$

$= j\omega \cdot F(\omega)$

(2) $\mathcal{F}[f''(t)](\omega) = (j\omega)^2 \cdot F(\omega) =$

$= -\omega^2 \cdot F(\omega)$

. - - - - —— . . . - - - - - . .

. - . - - - - - - - - . - - - - . . . .

n-te Ableitung von $f(t)$
korrespondiert mit
$(j\omega)^n \cdot F(\omega)$, falls
$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$:

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = (j\omega)^n \cdot F(\omega).$$

Bsp!

$$f = e^{-a t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) - ?$$

$$g(t) = t \cdot e^{-at^2}$$

$$f'\ \cancel{g}'(t) = e^{-at^2} \cdot \left(-at^2\right)' =$$

$$= -2a \cdot t \cdot e^{-at^2} =$$

$$= -2a \cdot g(t).$$

$$g(t) = \frac{f'(t)}{-2s} =$$

$$= -\frac{1}{2s} f'(t)$$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}\left[-\frac{1}{2s} \cdot f'(t)\right](\omega) =$$

Linearität

$$= -\frac{1}{2s} \mathcal{F}[f'(t)](\omega) =$$

Ableitungssatz:

$$= -\frac{1}{2a}(j\omega)\,\mathcal{F}[f(t)](\omega) =$$

$$= -\frac{j\omega}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}} =$$

$$= -\frac{j}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\omega\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Integrationssatz

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(u)\,du\right](\omega) =$$

$$= \frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$$

Faltungssatz:

$$h(t) = f(t) * g(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\cancel{t}\ +\infty} f(u) \cdot g(t-u)\, du$$

$h(t)$ heißt Faltung von $f(t)$ und $g(t)$.

(auch "Faltungsprodukt", oder "kontinuierliche Faltung" genannt).

Wichtig in linearer Systemtheorie!

Alle lineare Filter sind Faltungen mit den entspr. Faltungskernen; mehr, alle Faltungen sind lineare Filter.

Auch wichtig für Signal- und Bildverarbeitung.

Faltungssatz

$$\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t) \right](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u)\, du \right](\omega)$$

$$= \mathcal{F}\left[f_1(t) \right](\omega) \cdot \mathcal{F}\left[f_2(t) \right](\omega) =$$

$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

M. a. W.:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)\right](t) =$$

$$= f_1(t) * f_2(t)$$