$$T \longrightarrow \infty$$

$$\left[\, pm - T/2 \;;\; T/2 + pm \,\right]$$

$$\longleftrightarrow$$

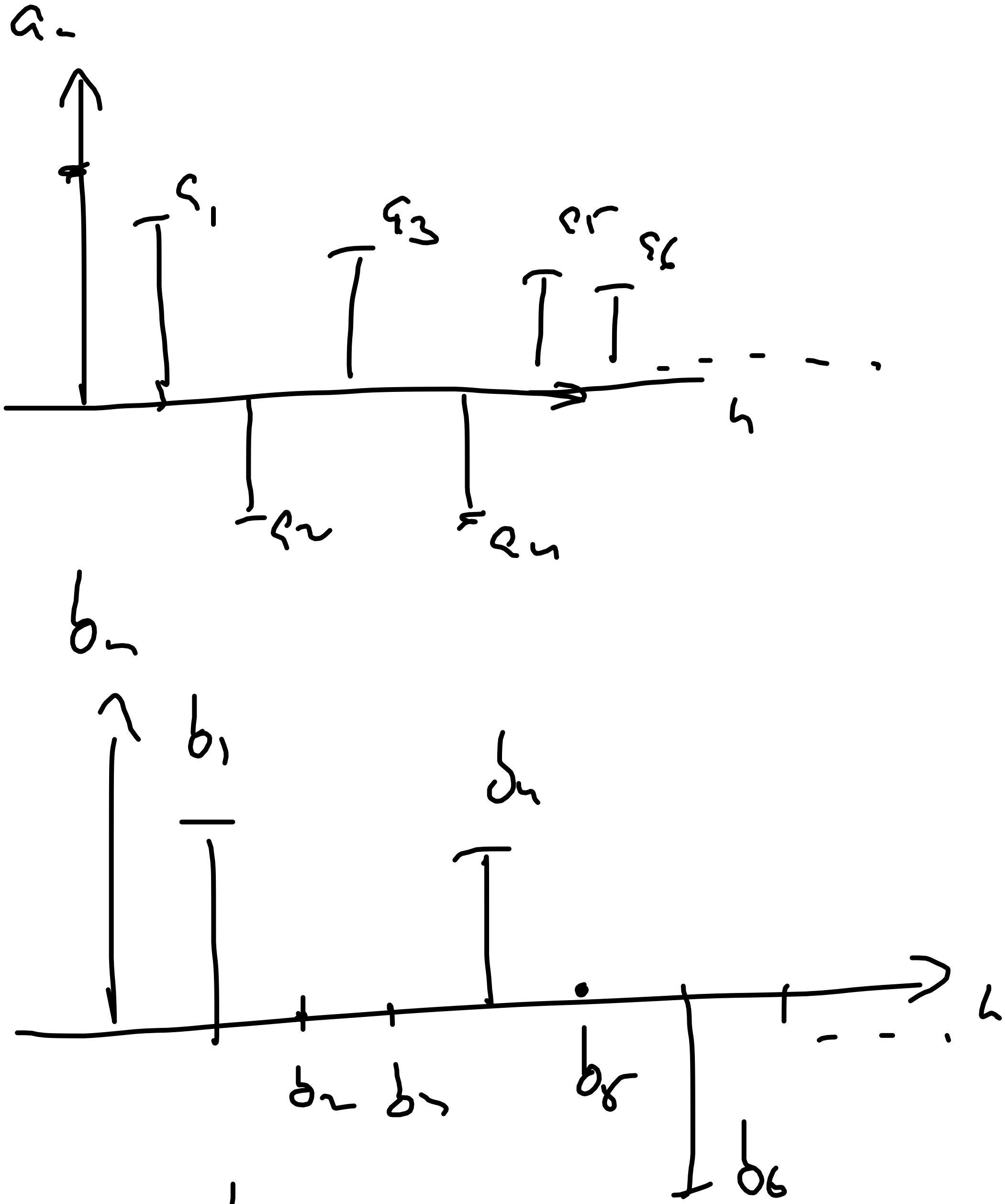
$$\Big\downarrow \; T \longrightarrow \infty$$

$$(-\infty \qquad +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\int_{(J)} = \int_{pm - T/2}^{pm + T/2}$$

$$T = 2 \qquad [0, 2]$$

$$\int_{(J)} = \int_{[0,2]} = \int_0^2 = \int_{1-1}^{1+1}$$



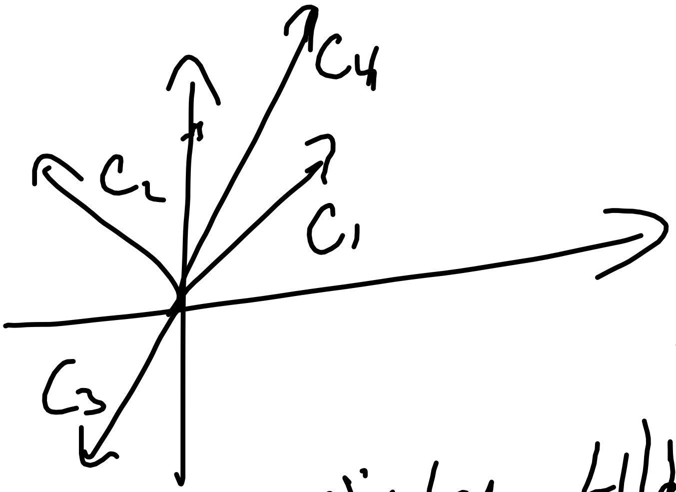
$a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$c_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$c_n \in \mathbb{C} \longrightarrow |c_n| \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

Amplituden-Spektrum



Und die Winkel bilden Phasenspektrum

$f(t) \rightsquigarrow FR(f)$

$e^t \; , \; at+b \; , \; \ln t \; , \; \begin{cases} -1 & x \in I_1 \\ 1 & x \in I_2 \end{cases}$

---

2. Das Fourier-Integral und Spektralfunktion.

Bisher: Zerlegung einer periodischen Funktion in harmonische Schwingungen.

Jetzt: Zerlegung einer nicht-periodischen Funktion in harm. Sch.

Idee: sei $f_T(t)$ T-periodisch für $|t| \leq T/2$. Wir stellen $f_T(t)$ als Fourier-Reihe dar und lassen $T \to \infty$ gehen.

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j(n\omega_0)t}$$

$$\Big\downarrow T \to \infty$$

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

In der komplexen FR Bd.:

$$(1)\quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow (2)\ \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Aus (1) folgt:

$$f_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \right) \cdot e^{j(\omega_0 n)t} \right] =$$

(2)

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \right) \cdot e^{j\omega_0 n t} \right] \omega_0$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\left(\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt\right) e^{jn\omega_0 t}\right]\omega_0$$

Heuristiken:

$T \longrightarrow \infty$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T\to\infty} d\omega$$

$$n\omega_0,\ n\in\mathbb{Z} \xrightarrow{T\to\infty} \omega\in\mathbb{R}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n\omega_0) \xrightarrow{T\to\infty} \int_{\omega} h(\omega)\,d\omega$$

Denn:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt}_{= F(\omega)\cdot 2\pi} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

D.h., die periodische Funktion $f_T(t)$ wird zur nichtperiodischen Funkt. $f(t)$:

$$f_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}^{+\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t} \qquad (n=-\infty)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt$$

<u>Definition</u> :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

mit $$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt$$

heißt <u>Fourier - Integral</u> der nicht - periodischen Funktion $f(t)$.

$(f(t), F(\omega))$ wird auch als Paar der <u>Fourier-</u>

Transformierte bezeichnet.

$F(\omega)$ ist die komplexe Amplitude zur Schwingung $e^{j\omega t}$.

$F(\omega)$ hat die Euler-Form

$$|F(\omega)|\, e^{j\cdot\varphi(\omega)}.$$

$|F(\omega)|$ heißt Amplituden-Spektrum, $\varphi(\omega)$ heißt Phasenspektrum.

2.1. Eigenschaften des Fourier-Integrals

Nicht jede $f(t)$ lassen sich als FI darstellen, sondern nur die, für die $F(\omega)$ existiert, d.h. $|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Es gibt einige Existenzsätze (entsprechend den Dirichlet-Bed. im periodischen Fall), z.B.:

<u>Satz:</u> Ist $f(t)$ absolut integrierbar, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < \infty,$$

so gilt

$$|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(Ohne Beweis).