h

$$\varphi(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x$$

$$[0;1] \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-6}$$

(1) stetig

(2) $\varphi'(x) = \frac{1}{5}\cos x$;

$$\varphi'(x) = 0$$

$$\frac{1}{5}\cos x = 0 \qquad \exists x \notin [0,1]$$

$\Rightarrow$ auf $[0,1]$ ist $\varphi'(x) > 0$

$\Rightarrow \varphi(x)$ auf $[0,1]$ monoton steigend:

$$\min_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi(0) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin 0 = \frac{4}{5}$$

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin 1 \approx$$

$$\approx 0{,}968295 \leq 1$$

$$\Rightarrow \varphi\,[0,8] \supseteq$$

$$\supseteq \varphi([0,1]) \subset [0,1]$$

$$\| $$

$$\left[\frac{4}{5};\ 0,568295\right]$$

(3) $\varphi'(x) = \frac{1}{5}\cos x$

$\varphi''(x) = -\frac{1}{5}\sin x$

$\varphi''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}\sin x$

$x = 0 \in [0,1)$

$\Rightarrow$

$$\varphi'(0) = \frac{1}{5}\cos 0 = \frac{1}{5}$$

$$\varphi'(1) = \frac{1}{5}\cos 1 < \frac{1}{5}$$

$\Downarrow$

$$\max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \frac{1}{5}$$

$\Downarrow$

z.B.: $L = \frac{1}{5} = 0,2$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ ist stetig,
selbstabbildend und
kontrahierend auf
$x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Satz gilt
(Fixpunktsatz gilt):

$\Rightarrow$ (1) $\exists! x^* \in [0,1]$

$$x^* = \varphi(x^*)$$

(2) $x_k \longrightarrow x^*$, $k \to \infty$

т.е. $x_{k+1} = \varphi(x_k) =$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin(x_k)$$

$\forall\, x_0 \in [0,1]$

(3) $\varepsilon = 10^{-6}$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

When $\frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$

$\Downarrow$

$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon$$

$$\varepsilon = 10^{-6}$$

$$L = 0,2$$

z.B. $x_0 = 0$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin 0 = \frac{4}{5} =$$

$$= 0,8$$

n - ?

$$\frac{0,2^n}{1-0,2} \Big| 0,8 - 0 \Big| \leq 10^{-6}$$

$$\frac{0,2^n}{0,8} \Big| 0,8 \Big| \leq 10^{-6}$$

$$n \geq \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(0,2)} =$$

$$= \frac{\lg 10^{-6}}{\lg 0,2} = \frac{-6}{\lg 0,2} = 8,8410$$

$n \geq 8,584\,06$



Men bruit hōcistes

9 Iterdfoue

Bsp 2:

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} - x.$$

(1) Untersuche, ob $g(x)$ auf $[2,3]$ Nullstelle hat. Wieviel, falls ja? (Beweis!)

(2) Falls es nur eine NS gibt, wieviele Iterationen braucht man, um Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-2}$ zu erreichen?

Bew.:

(1) $f(x)$ hat auf $[2,3]$ keine Definitionslücken und ist als Hilfsfunktion von stetigen Funktionen stetig.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$(\sqrt{x}) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

(2) Bisektionsverfahren:

$f(2) = 0,05-6625;$

$f(3) = -0,17388;$

(2.) $g'(x) =$

$= \left(\frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} - x\right)' =$

$= \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' - 1 =$

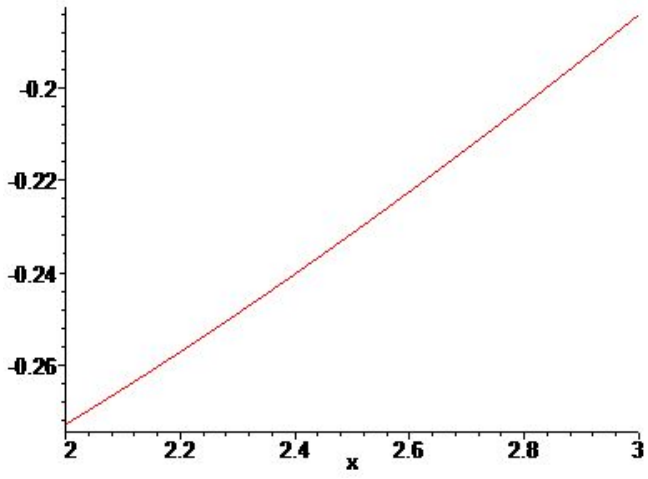
$= \frac{1}{4} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - 1;$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} = 1$$

$$e^{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x}$$

$$f'(x) > 0$$



$f' > 0$

$\Downarrow$

$f(x)$ ist streng wachsend auf $[2,3]$

$\Longrightarrow$ Bisektionsverfahren darf angewendet werden:

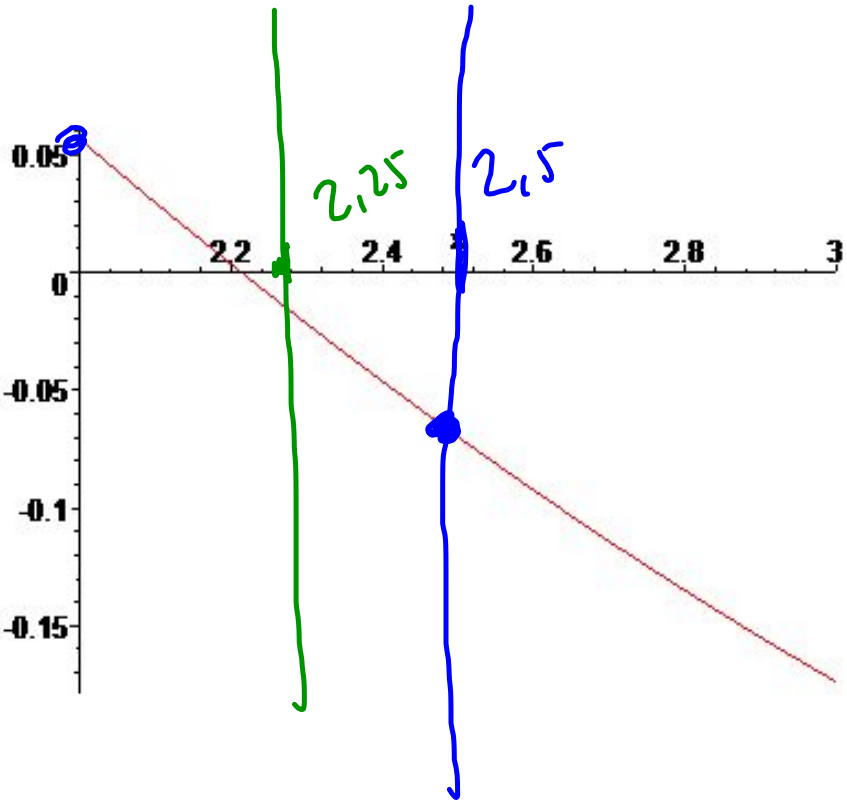
$f(2) \approx 0,0566$

$f(3) \approx -0,1738$

$f(2,5) \approx -0,0698;$

$\Downarrow$

$NS \in [2; 2,5]$



$f(2,25) = -0,0082$

$NS \in [2; 2,25]$

$f(2,125) = 0,0231; \quad > 0$

$\Downarrow$

$NS \in [2,125; 2,25]$

$f\left(\frac{2.25 + 2,125}{2}\right) =$

$\Rightarrow f(2,1875) = 0,0068$

$\Rightarrow \quad \sqrt{S} \in [2,1875;\ 2,25]$

Genauigkeit:

$\delta = 0{,}0625 = 2{,}25 - 2{,}1825;$

$\delta > 10^{-2};$

u.s.w. .....

$L = |3-4| = 1;$ $\ell(I)$ Länge des Intervalls

Nach n Schritten:

$$\ell(I_n) = 1 \cdot \frac{1}{2^n}$$

$\forall$ sind $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2}$$

$$n > \left| \frac{\log 10^{-2}}{\log 2} \right| = 6,6$$

$\Rightarrow n = 7$ (Iterationen)

Anderer Lösungsweg:

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} - x ;$$

Wir suchen NST:

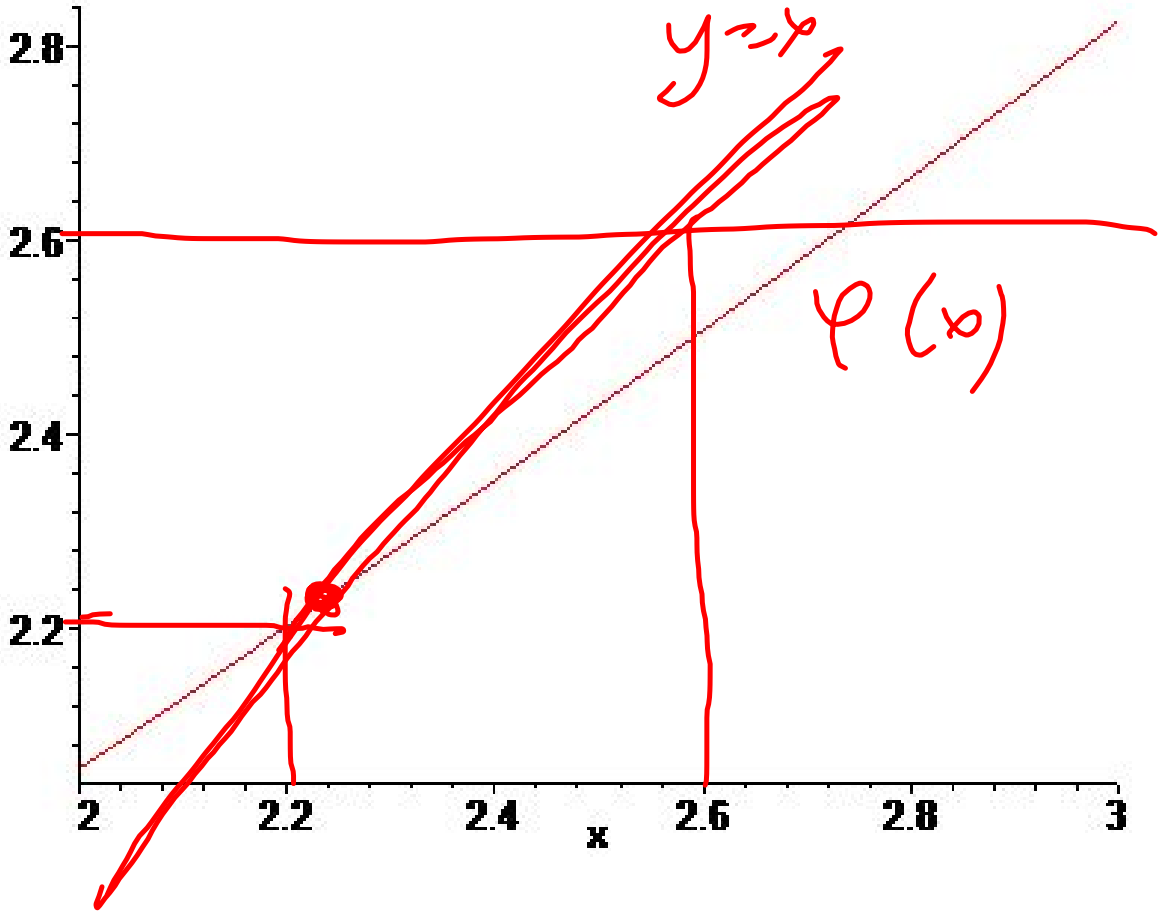
$$0 = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} - x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}$$

Fixpunktgleichung für

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \text{ auf } [1,3]$$


2.8
2.6
2.4
2.2
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
x
y=x
φ(x)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}}$$

(1) $\varphi(x)$ är stetig

på $[2,3]$

(2) $\varphi'(x) = \frac{1}{4} x^{-1/2} e^{\sqrt{x}} =$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} \; ,$$

$\varphi'(x)$ är på $[2,3]$

positiv: $\varphi'(x) > 0$

$\Downarrow$

$\varphi(x)$ monoton växande

$$\varphi([2,3]) = [\varphi(2);\ \varphi(3)] =$$

$$= [0,72168084;\ 0,81582965]$$

$$= [2,056\ ;\ 2,83]$$

$$\cap$$

$$[2,3]$$

$$f''(x) = \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)' 4\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot (4\sqrt{x})'}{16x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot 4\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}}{16x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}\, 2e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}}{16x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{8x\sqrt{x}} > 0$$

on $[2,3]$

$\Rightarrow \varphi'(x)$ auf $[2,3]$

monoton wachsend (und positiv)

$\Downarrow$

$$\max_{[2,3]} |\varphi'(x)| = \varphi'(3) = 0{,}816 < 1$$

$\Rightarrow$ Fixpunktsatz gilt!

$L = 0{,}816$

$x_0 = 2$

$\downarrow$

$x_1 = \varphi(2) = 2{,}056$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \le \varepsilon$$

$$\frac{0{,}816^n}{0{,}184} \cdot 0{,}056 \le 10^{-2}$$

$$n \ge \frac{\ln\left(10^{-2} \cdot 0{,}184 / 0{,}056\right)}{\ln 0{,}816} =$$

$$= 16{,}787$$

$\Longrightarrow$ 17 Iterationen.

Klausurtermin

5. September

9^{00} Uhr

Raum wird

zusätzlich bekanntgegeben.

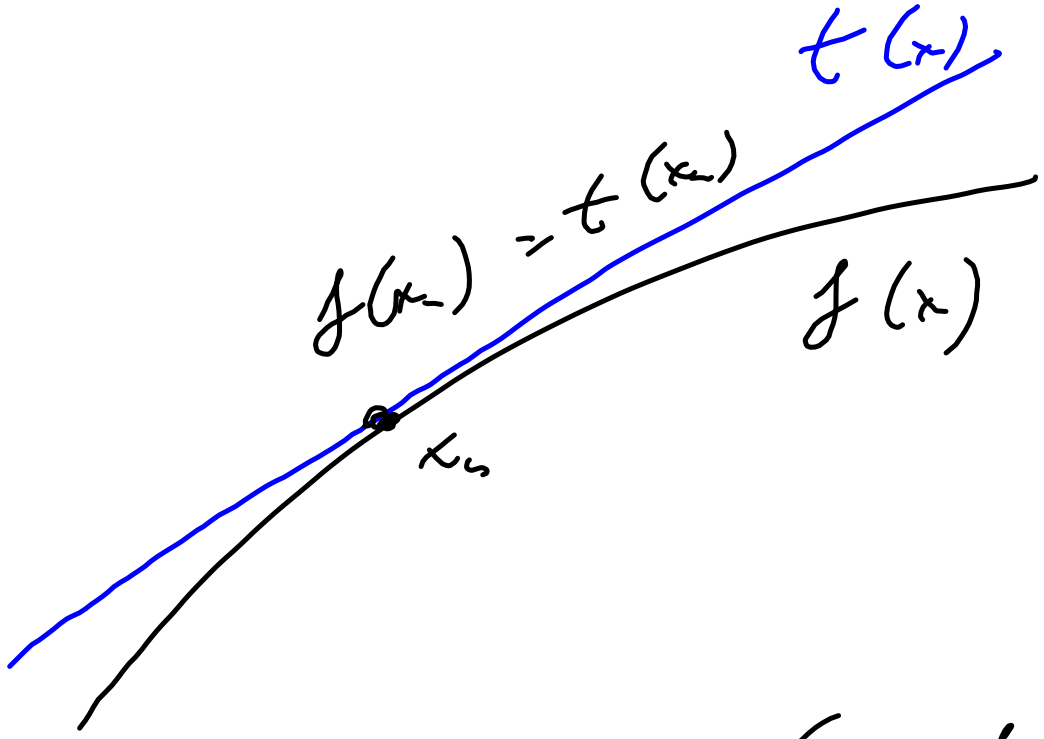
Fragestunde

3. September 10^{00} Uhr

Raum ?

Newton - Raphson - Tangentenverfahren zur Bestimmung von Nullstellen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.



Tangente in $(x_n, f(x_n))$

erfüllt:

(1) $t(x_n) = f(x_n)$

(2) Steigung von $t(x)$ ist $f'(x_n)$

(3) Tangente ist eine Gerade

$$t(x) - f(x_n) = t(x_n)$$

$$= f'(x_n)(x - x_n)$$

well:

$$\frac{t(x) - t(x_n)}{x - x_n}$$

ist die Steigung der Gerade $t(x)$ durch $(x_n, t(x_n))$

$\Rightarrow$ mit

- $t(x_n) = f(x_n)$
- Steigung ist $f'(x_n)$

$\Downarrow$

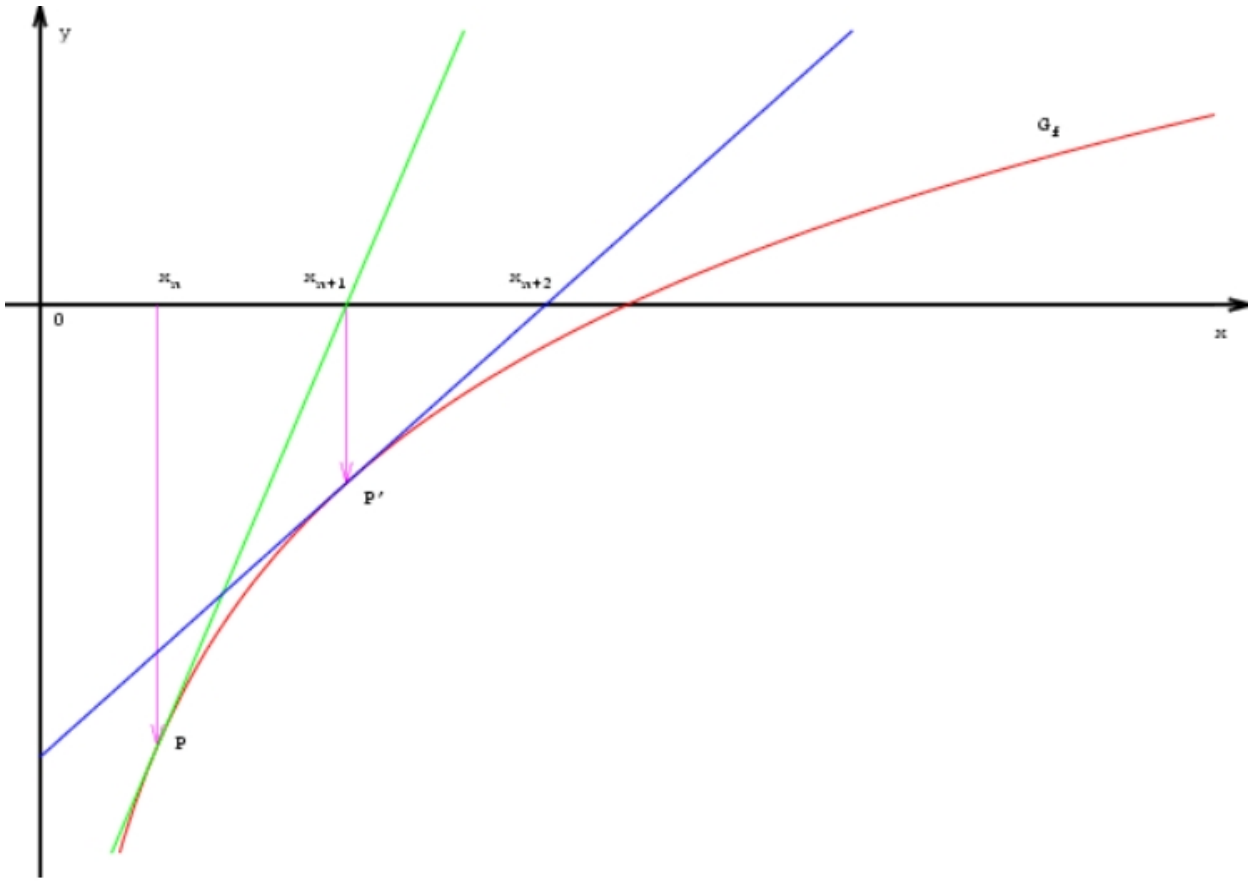
$$t(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Schnitt mit x-Achse ($t = 0$) führt auf

Die Iterationsvorschrift:

x_0 – Startwert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Vgl.: Taylor - Reihe

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{\text{Tangente}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$+ \dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k;$$

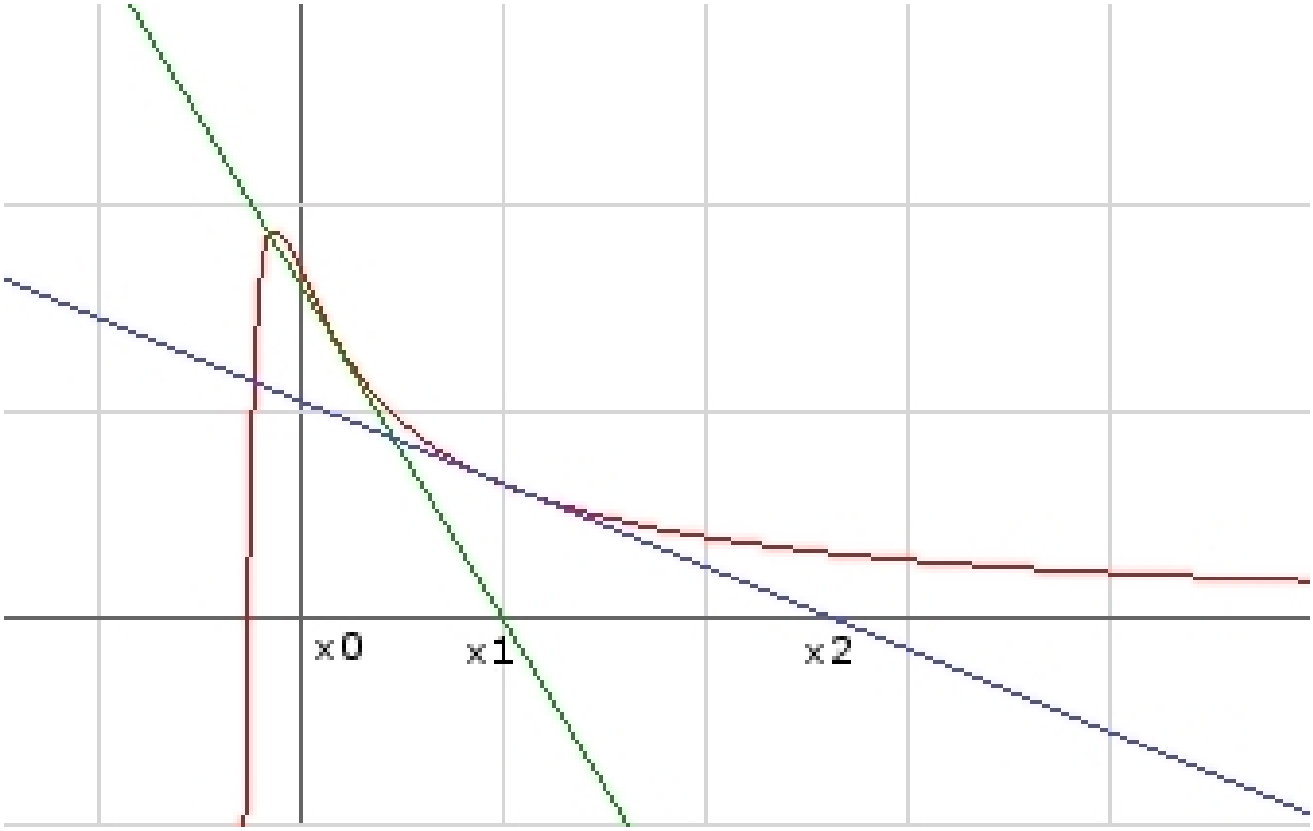
mit $f^{(0)}(x) = f(x)$

$0! = 1$

$(x-x_0)^0 = 1$

Negative Beispiele:

a) Verfahren entfernt sich von der Nullstelle, anstatt sich ihr zu nähren:



b) $f(x) = x^3 - 2x + 2$

$x_0 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2$;

$x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

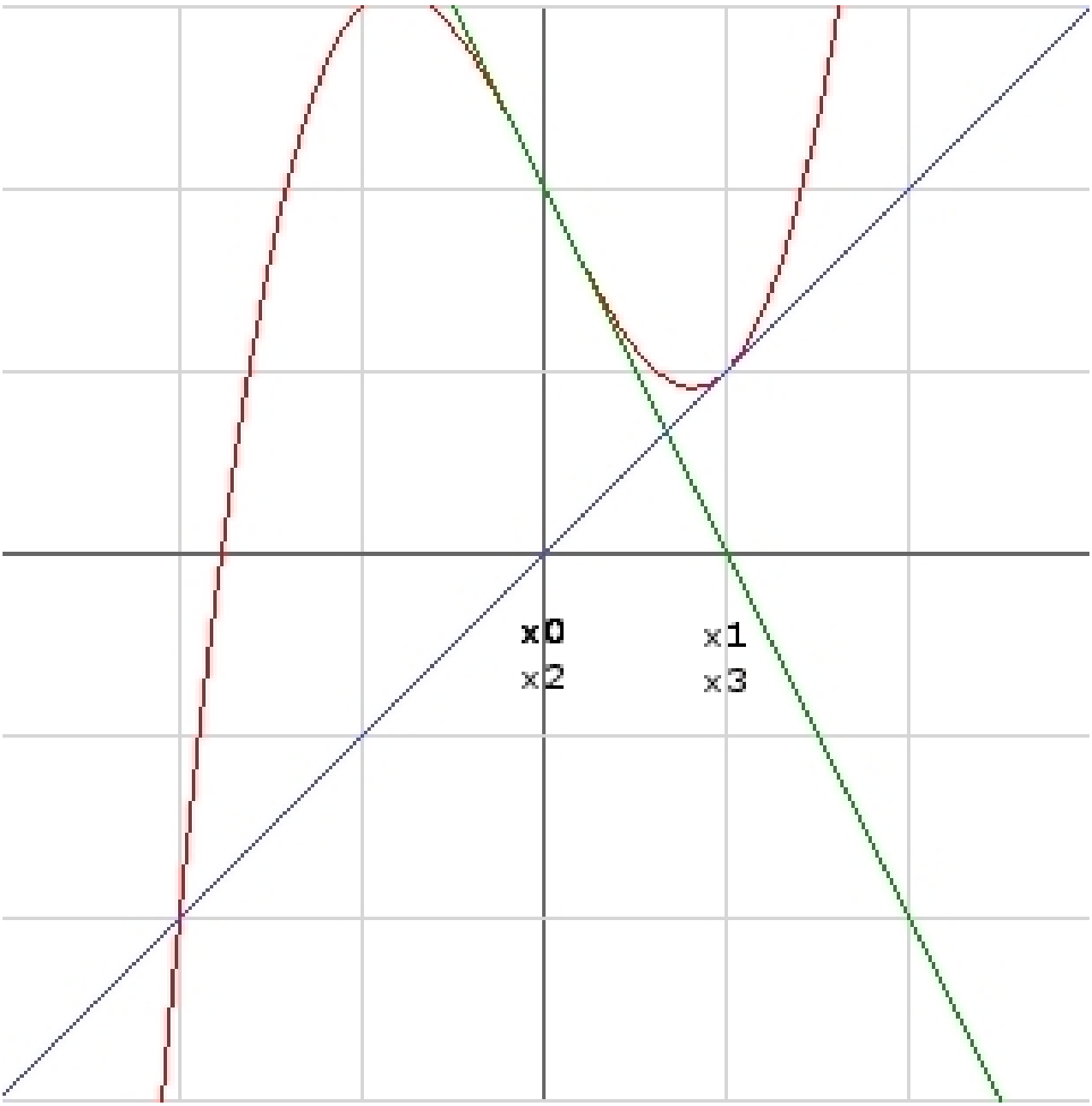
$$x_1 = 0 - \frac{0^3 - 2\cdot 0 + 2}{3\cdot 0^2 - 2} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{1^3 - 2\cdot 1 + 2}{3\cdot 1^2 - 2} = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_3 = 1$

$x_4 = 0$



Endlosschleife

Durchführbarkeit?

(2) $f'(x) \neq 0$ – klar

(3) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

mit $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Fixpunktiteration für $\varphi(x)$!

D.h. um Konvergenz zu haben, müssen wir anfordern, daß $\varphi(x)$ Kontraktion ist:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x-y|$$

mit $L < 1$.

Um L zu bestimmen:

$$|\varphi'(x)| = \left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right| =$$

$$= \left| 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right|$$

$$= \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| <$$

$$< 1 \quad (\text{Kontradiktion!})$$

$\Rightarrow$ Durch Führerbedingung:

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

$x_n \to x_{n+1}$:

$$0 < \left| \frac{f(x_n) \cdot f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right| \overset{?}{<} 1$$

ja:
Weiterrechnen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

nein:
Abbrechen!
Andere Startwert auswählen

Бар: (2. Нег. Бар):

$$x^3 - 2x + 2 = f(x)$$

$$x_0 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2;$$

$$f''(x) = 6x;$$

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| = 0 \leq \delta$$

Abbruchbedingung:

$$|f(x_n)| \leq \varepsilon$$