Numerik & Statistik: Numerik
HTW des Saarlandes
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Musterlösung zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung*

$$(x-1)y' + y = 0$$

im Bezug auf die Relation

$$y(x-1) = C \qquad \forall C \in \mathbb{R}?$$

Lösung:

Für $C \neq 0$, bedeutet die Relation Existenz zweier stetig differenzierbaren Funktionen

$$\phi_1 = \frac{C}{x-1}, \quad x \in (-\infty, 1)$$

$$\phi_1 = \frac{C}{x-1}, \quad x \in (1, \infty)$$

Beide Funktionen lösen die Gleichung.

Falls $C = 0$, führt die Raltion auf die Lösung $y \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 *In einem Behälter befinden sich a kg der Salz-Wasser-Lösung, die b kg Salz enthält. Zur bestimmten Zeit schaltet man ein Gerät an, das in den Behälter c kg klares Wasser pro Sekunde nachfüllt und gleichzeitig c kg der Lösung pro Sekunde aus dem Behälter abpumpt. Dabei wird die Lösung in dem Behälter ständig nachgemischt. Wie viel Salz (in Abhängigkeit von Zeit) enthält die Lösung?*

Lösung:

Sei t die Zeit und beginne das Prozess zu $t = 0$.

$m(t)$ sei die gesuchte Funktion. Dann gilt $m(0) = b$.

Betrachten wir ein kurzes Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ zum fixen Zeitmoment t. Am Anfang dieses Zeitintervalls enthält das Reservoir $m(t)$ kg Salz, am Ende $m(t+\Delta t)$ kg. Die Differenz $m(t) - m(t+\delta t)$ kg ist die Salz, die den Behälter in der Zeit Δt verlassen hat.

Die Salzkonzentration ist von $\frac{m(t)}{a}$ auf $\frac{m(t+\Delta t)}{a}$ gefallen. D.h.:

$$\frac{m(t+\Delta t)}{a} c\Delta t \leq m(t) - m(t+\Delta t) \leq \frac{m(t)}{a} c\Delta t,$$

oder

$$\frac{m(t+\Delta t)}{a} c \leq \frac{m(t) - m(t+\Delta t)}{\Delta t} \leq \frac{m(t)}{a} c.$$

Die Ungleichungen sind sogar für $c \neq 0$ und $b \neq 0$ scharf.

DAs Charakter des Prozesses bedeutet, daß die Funktion $m(t)$ stetig ist. D.h.

$$\lim_{\Delta t \to 0} m(t + \Delta t) = m(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{c}{a} mt.$$

Das bedeutet, daß die gesuchte Funktion $m(t)$ besitzt in jedem Punkt differenzierbar ist:

$$m'(t) = -\frac{c}{a} mt.$$

Also, $m(t)$ löst diese Gleichung. Nimmt man zusätzlich die Anfangsbedingung $m(0) = b$ zur Kenntnis, erhält man nach der Integration (trennbare Variablen, linear, homogen, 1. Ordnung):

$$m(t) = be^{-\frac{c}{a}t}.$$

Aufgabe 3 *Eine bestimmte Anzahl von Bakterien befindet sich bei den idealen Vermehrungsbedingungen. Wie viel Zeit vergeht, bis sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt?*

Lösung:

Sei $m(t)$ die Anzahl der Bakterien zum Zeitmoment t und $m(0) = m_0$. Biologen habe experimentell festgestellt, daß die Vermehrungsgeschwindigkeit proportional der Anzahl der Bakterien ist (bei günstigen Bedingungen). Daraus folgt die DGl

$$m'(t) = km(t), \quad k > 0.$$

k hängt von der Art der Bakterien und der Bakterienumwelt, und kann experimentell bestimmt werden.

Weil $m(t) > 0$, dürfen wir die Variablen trennen:

$$\frac{dm}{m(t)} = k\mathrm{dx}.$$

Nach der Integration der Gleichung erhalten wir mit elementaren Umformungen:

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Nun können wir die Gleichung

$$m(t) = 2m_0$$

lösen:

$$2m_0 = m_0 e^{kt} \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Bemerken wir noch, daß die Zeit der Verdoppelung von der Anfangszahl der Bakterien nicht abhängt.

Aufgabe 4 *Finde die Lösung $y = \phi(x)$ der Gleichung*

$$x^2 y' - 1 = \cos 2x$$

, die die Bedingung $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \frac{5\pi}{4}$ *erfüllt.*

Lösung:
Sei $\phi(1) = y_0 \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dann:

$$\int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{dy}{1+\cos 2y} = \int_1^x \frac{\mathrm{dx}}{x^2}$$

$$\to \frac{1}{2}(\tan\phi(x) - \tan y_0) = -\frac{1}{x} + 1.$$

$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \tan y_0) = 1$, also $\tan y_0 = -1$. D.h. $\tan\phi(x) = 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow$

$$y = \pi + \arctan\left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

Aufgabe 5 *Löse die Gleichung*

$$(1+e^y)dx - e^{2y}\sin^3 x dy = 0.$$

Finde die Lösung, die die Bedingung $y(\pi/2) = 0$ *erfüllt.*

Lösung:

$$\int \frac{e^{2y}}{1+e^y} dy = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^3 x}$$

$$\int \frac{e^y d(e^y)}{1+e^y} = -\int \frac{d(\cot x)}{\sin x}$$

$$\int \frac{d(\cot x)}{\sin x} = -\frac{\cot x}{\sin x} - \int \frac{d(\cos^2 x)}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x)}{\sin^2 x} - \int \frac{d(\cot x)}{\sin x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$\Rightarrow e^y - \ln(1+e^y) = -\frac{\cos x)}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 9$, also $1 - \ln 2 = C$.

Die gesuchte Lösung wird nun durch die folgende *implizite* Relation gegeben

$$e^y - \ln(1+e^y) = -\frac{\cos x)}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + 1 - \ln 2,$$

oder

$$e^y - \ln\frac{2}{(1+e^y)} = -\frac{\cos x)}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + 1.$$

Aufgabe 6 *Löse die Gleichung*

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Lösung:

$$y' = \cos(x - y - 1)$$

Substitution

$$z := x - y - 1$$

Führt zur einer DGl mit trennbaren Variablen:

$$1 - \frac{dy}{\text{dx}} = \frac{dz}{\text{dx}} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{dz}{\text{dx}} = \cos z \Leftrightarrow \frac{dz}{\text{dx}} = \cos z.$$

Funktionen $z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sind die partikuläre Lösungen. Andere Lösungen erfüllen

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int \text{dx} \Rightarrow$$

$$-\cot\frac{z}{2} = x - C,$$

oder

$$z = 2arc\cot(c - x) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Nach der Rücksubstitution erhalten wir zwei Lösungen:

$$y_1 = x - 1 + 2k\pi,\ l \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = x - 1 - 2arc\cot(c - x) + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$