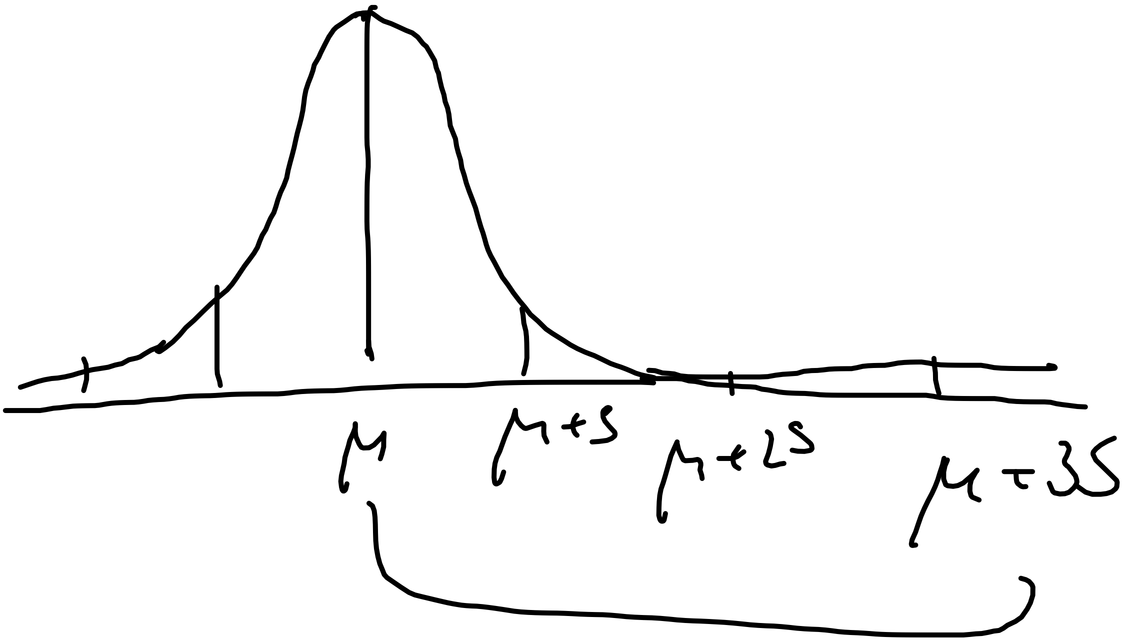
$\bar{x} \pm s\sqrt{3}$




$[\mu-3s, \quad \mu+3s]$ 99,7%

$[\mu-2s, \quad \mu+2s]$ 96,5%

$[\mu-s, \quad \mu-s]$ 67,5%

1) $\bar{x} = 10000$ , $s = 10$

2) $\bar{x} = 1$ , $s = 10$

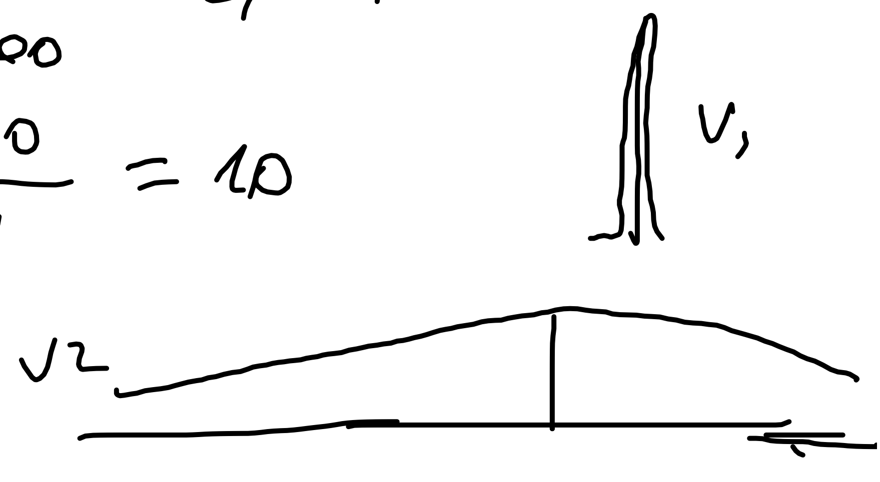
## 2.2.6. Variationskoeffizient

**Def!**

$$v = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$v_1 = \frac{10}{10000} = 0{,}001$$

$$v_2 = \frac{10}{1} = 10$$



## 2.2.7. Eigenschaften von dem arithm. Mittel und Stichprobenstreuung (Prabtische Berechnung)

**Satz 2.2.7.1**:

(1) Die Summe der Abweichungen der Zahlen von ihrem arithmetischen Mittel ist gleich Null:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x}) = 0$$

Bew:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x}) =$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left( x_j - \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left( n x_j - \sum_{k=1}^{n} x_k \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} x_j - \sum_{k=1}^{n} x_k \right) =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_j - x_k\right)}}$$

$$\left(a_{kj}\right)^{n\times n} = x_j - x_k \quad \text{— Matrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
k \downarrow \; \backslash \; j \rightarrow & 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\
\hline
1 & 0 & -a_{21} & -a_{31} & & & \\
2 & a_{21} & 0 & -a_{32} & & & \\
3 & a_{31} & a_{32} & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
n & & & & & & 0
\end{array}$$

$$a_{21} = x_1 - x_2$$

$$a_{12} = x_2 - x_1 = -a_{21}$$

$$a_{13} = x_3 - x_1 = -a_{31}$$

$$a_{31} = x_1 - x_3$$

$$a_{32} = x_2 - x_3$$

$$a_{23} = x_3 - x_2 = -a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & -A_\Delta \\ & \ddots & \\ A_\Delta & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{kj} = -a_{jk}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j - x_k) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj} = \frac{0}{n} = 0.$$

well:

$$a_{kk} = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$\forall (k,j): \quad a_{kj} = -a_{jk}$$

Satz 2.2.7.2.1: $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - a\right)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{a \in \mathbb{R}}{\arg\min} \left(x_j - a\right)^2 = \bar{x}$$

$$\underset{a \in \mathbb{R}}{\mathrm{Arg\,Min}} \left(x_j - a\right)^2 = \bar{x}$$

## Satz 2.2.2.3

Werden die Einzelwerte einer linearen Transformation (affiner Trafo!) unterzogen:

$$x_j^* = a x_j + b \, ,$$

so gilt:

(a) Der Mittelwert unterliegt der gleichen Transformation:

$$\overline{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^* =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (a x_j + b) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a x_j + \sum_{j=1}^{n} b\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a \sum_{j=1}^{n} x_j + n b\right) =$$

$$= a \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)}_{\bar{x}} + b =$$

$$= a\bar{x} + b$$

(b) Für die Streuung

$$s^{*2} = a^2 s^2$$

---

Bsp.: Tagesgebühr 40 €

Kilometerpauschale 0,40 €/km

Pro Tag legen die Autos im Schnitt 250 km mit Standardabweichung 5 km.

Einnahmen pro Auto pro Tag?

$b = 40€$

$a = 0{,}4 €/km$

Laufleistung : $s$

$E = a \cdot s + b$

$\bar{x} = 250$ ; $s = 5$

$\bar{E} = a\bar{x} + b =$

$= 0.4 \cdot 250 + 40 =$

$= 140 €$

$$s = 5$$

$$(s^*)^2 = a^2 \cdot s^2$$

$$s^* = a \cdot s = 0{,}4 \cdot 5 = 2\text{€}$$

# 2.2.7.4. Standardisierung

Die Lineare Trafo

$$x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

heißt Standardisierung oder Standardisierungstransformation.

$$\overline{x^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^* =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{s} =$$

$$= \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) =$$

$$\overset{\text{Satz 2.2.7.1}}{=} \frac{0}{ns} = 0$$

Zu $S^*$:

$$x_i^* = \frac{1}{s} x_i - \frac{\bar{x}}{s}$$

$$T = a x_i + b \Rightarrow a = \frac{1}{s}$$

Laut Satz 2.2.7.3:

$$(s^*)^2 = a^2 \cdot s^2$$

oder

$$s^* = |a| s$$

$$\Rightarrow s^* = \frac{s}{s} = 1$$

Also insgesamt:

$$x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

standardisiert d.h.

Stichprobe $\{x_i\}$ auf $\{x_i^*\}$

mit $\overline{x^*} = 0$

und $s^{*2} = 1$

Zur Berechnung von

$\overline{x}$ und $s$ bzw. $s^2$:

Satz 2.2.7.5:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$$

Satz 2.2.7.6:

**"Erweiterung von Stichprobe"**

Hat man schon $\bar{x}$ und $s$ für die Daten $x_1, \dots, x_n$ ermittelt, und kommt noch ein Wert $x_{n+1}$ hinzu, so gilt:

$$\overline{x_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(x_{n+1} + n\bar{x}\right)$$

$$s_{n+1} = \sqrt{(n+1)\left(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}\right)^2 + \frac{n-1}{n} \cdot s^2}$$

**Satz 2.2.7.7:** Hat man für zwei Stichprobe vom Umfang $n_1$ und $n_2$ Mittelwerte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ und Streuungen $s_1^2$ und $s_2^2$ berechnet, so ergibt sich der Mittelwert und die Streuung der gemeinsamen Stichprobe vom Umfang $(n_1+n_2)$ gemäß:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 1} +$$

$$+ \frac{n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 - 1}$$

Bsp: Zwei Kreuzungen

Hohenzollernstr / Goethestr ;

Hohenzollernstr / Mohlstr ;

Durchschnittliche Anzahl der roten Autos pro 100 Autos ;

20 Autos → HG ;

80 Autos → HM ;

HG: $\bar{x}_1 = 4$ rote Autos / Std.

HM: $\bar{x}_2 = 5$

$s_1^2 = 0{,}01$

$s_2^2 = 0{,}04$

$$\bar{x} = \frac{4\cdot 20 + 5\cdot 80}{100} = 4{,}8$$

nette Aufgabe

3 Stunden

an den beiden kann...

$$s^2 = \frac{0{,}01\cdot(20-1) + 0{,}04(80-1)}{100-1} + \frac{20(4-4{,}8)^2 + 80(5-4{,}8)^2}{100-1}$$

$$= \frac{0{,}19+3{,}16}{99} + \frac{20\cdot 0{,}8^2 + 80\cdot(0{,}2)^2}{99}$$

$$= \frac{3{,}75}{99} + \frac{20\cdot 0{,}64 + 80\cdot 0{,}04}{99} =$$

$$= \frac{19{,}75}{99} = 0{,}1995 \approx 0{,}2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}79 \\ 4 \\ \hline 3{,}16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}16 \\ 0{,}19 \\ \hline 3{,}35 \end{array}$$

$$12{,}8 + 3.2 = 16$$