Def.: Sei V ein zufälliger Versuch. Wenn für die Menge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ aller Elementarereignisse gilt:

1. $|\Omega| = m < \infty$ $\quad (\Omega = \text{endlich})$
2. $P(\{\omega_i\}) = p \; \forall i = 1 \dots m$ $\quad$ (alle $\{\omega_i\}$ sind gleichwahrscheinlich)

dann heißt V *Laplace-Versuch*. (Laplace-Versuche: typisch für Glücksspiele)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Satz: Sei V ein Laplace-Versuch, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ und sei $A \subseteq \Omega$ mit $A = \{\omega_{i1}, \dots \omega_{il}\}$ $(i, j \in \{1, \dots, m\})$. Dann gilt:

1. $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m} \forall i = 1, \dots, m$
2. $P(A) = l : m = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\quad$ (Chance für das Eintreten von A)

A, B disjunkt $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A V B

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_2 \cup \dots \cup A_5) = \dots$$
$$= \dots\dots \sum_{k=1}^{5} P(A_k),$$

A_i disjunkt.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

A_k disjunkt.

(4) $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A_i disjunkt

(Def. von Wahrscheinl.-Maß)

Nicht bei der klass. Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im klassischen Fall alles immer endlich.

Bsp: "Rate mal eine Zahl"-Spiel. z.B. wird Zahl π geraten. Es sind ∞-viele reelle Zahlen, die Ω bilden; es gibt ∞-viel Approximationen von π (π; 3,14; 3,1415; 3,1415926; ....)

$\Rightarrow$ Klass. Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\rightarrow$ je nachdem, ob man Approximationen an π als "passend" zulässt oder nicht, kann hier auch 1, oder die endliche Anzahl der "zugelassenen" Approximationen stehen.

Wenn alles endlich

$\Downarrow$

Klass. Wahrscheinlichkeit

||| äquivalent

Wahrscheinlichkeitsmaß (axiomat. Definition)

Klassische Wahr:

immer eine rationale Zahl ($\in \mathbb{Q}$)

Wahr.-Maß : $\in \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Bsp.:

Spielregeln:
- Ziehen einer zufälligen Zahl zwischen 1 und 50 (inkl.)
- Einsatz: 5€
- Ist die zahl durch 6 oder 8 teilbar, so gewinnt man 20€

Frage:
Würden Sie dieses Spiel spielen?

$$\Omega = \{1, 2, \ldots\ldots, 50\}$$

$$|\Omega| = 50$$

$$A = \{6, 8, 12, 16, 18, 30, 24, 32, 36, 40, 42, 48\}$$

$$|A| = 12$$

$$P(A) = \frac{12}{50} = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

24%

Pro Spiel:

24% von 20€

⇓

4,8 € Gewinn pro Spiel

Einsatz: 5€

→ Verlust pro Spiel:
0,2 €

Kombinatorik

Bsp.:

V=Werfen mit 2 Würfeln.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

a) Genau eine Sechs wird geworfen? A
b) Mindestens eine Sechs wird geworfen? B
c) Höchstens eine Sechs wird geworfen? C

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots\ldots\ldots\ldots(6,6)\} =$$

$$= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,\ldots,6\}$$

$$= 6 \cdot 6 = 36$$

a) $A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (5,6), (4,6), (3,6), (2,6), (1,6)\}$

$|A| = 10$

disjunkt

$B = A \cup \{(6,6)\}$

$|B| = 10 + 1 = 11$

$C = \Omega \setminus \{(6,6)\}$

$|C| = 35 = |\Omega| - 1$

$P(A) = \frac{10}{36}$

$P(B) = \frac{11}{36}$

$P(C) = \frac{35}{36}$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

$\bar{C}$ = "2 mal 6" =

$$= \{(6,6)\}$$

$$P(\bar{C}) = 1/36$$

$$P(C) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

1) $\bar{A} = \Omega \setminus A$

$\Downarrow$

A und $\bar{A}$ <u>immer</u> disjunkt

2) A und B disjunkt

$\boxed{\not\Downarrow \quad \bar{A} = B}$

$$P(A) + P(\bar{A}) =$$

$$= P(A) + P(\Omega \setminus A) =$$

A, $\Omega \setminus A$ sind disjunkt

$\Downarrow$

$$= P(A \cup (\Omega \setminus A)) =$$

$$= P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup B) =$$

$$= P(A) + P(B) \boxed{- P(A \cap B)}$$

Klausur: 30.07.13
8^{00} Uhr