Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Verändert eine Zusatzinformation über das Eintreten von B die Chance für das Eintreten von A nicht, so nennt man A und B stochastisch unabhängig.

Definition
Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Folgerung: Seien A und B stochastisch unabhängig, dann gelten folgende Beziehungen:

1) $$\underbrace{P(A|B)}_{=P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ wenn A und B stoch. unabh.}}$

Definition:
n Ereignisse $A_1, A_2, \cdots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, falls für jede beliebige Teilauswahl $A_{1*}, A_{2*}, \cdots, A_{k*}$ von k Ereignissen aus diesen n gilt:

$$P(A_{1*} \cap A_{2*} \cap \cdots \cap A_{k*}) = P(A_{1*})P(A_{2*}) \cdot \cdots \cdot P(A_{k*})$$

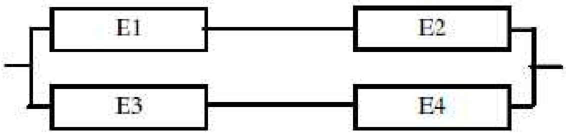
Statistik-Klausur,   10 Aufgaben
Jede Aufgabe hat 3 Antwortalternativen, von denen genau eine richtig ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Student, der rät, alle Aufgaben richtig löst?

Beispiel 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beobachter in einem gewissen Zeitraum ein Signal auf einem Bildschirm übersieht, sei 0,2 und bei allen Beobachtern gleich. Wie viele unabhängig voneinander arbeitende Beobachter
benötigt man, wenn insgesamt die Wahrscheinlichkeit dass ein Signal übersehen wird (Ereignis A), nicht größer als 0,01 sein soll?

Beispiel 2:

Wir wollen von der Ausfallhäufigkeit q des Geräts G auf Ausfallhäufigkeit einer bestimmten Baugruppe E_i (Bauelement) schließen.

Gegeben sei ein Gerät



Seien folgende Ereignisse definiert :

G - Gerät ist OK, $\overline{G}$ -Gerät ist nicht OK,
E_i - Bauelement E_i ist OK, $\overline{E}_i$ - Bauelement Ei ist nicht OK.

Wir vereinfachen dazu unser Modell und treffen folgende Annahmen:

1. Alle Bauelemente sind identisch

2. Alle Bauelemente fallen unabhängig voneinander und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p aus: $P(\overline{E}_i)=p$, i=1,2,3,4.

3. Funktionsweise des Gerätes : Reihe funktioniert, falls beide Baugruppen funktionieren, Gerät funktioniert, falls eine Reihe funktioniert.

   a) Gegeben ist nun $q=P(\overline{G})$. Gesucht ist p.

   b) Wie groß darf die Ausfallwahrscheinlichkeit p eines Bauelenmentes höchstens sein, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gerätes q 10 % nicht überschreitet?

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes

Vollständiges Ereignissystem:

Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Eine Menge von Ereignissen heißt vollständiges Ereignissystem in $\mathcal{E}$, falls gilt:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j$

(A_i sind disjunkt)

b) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

für $A_i \subseteq \Omega$

$\emptyset = \{\omega_1\} \cap \{\omega_2\}$ Elementar.

$\omega_i \in \Omega$

Alle $\omega_i \in \Omega$ sind disjunkt.

Aber $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}$ ......

$= \bigcup_i \{\omega_i\} = \Omega$

Bsp: Würfeln:

(1) $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}$

vollst. ES

(2) $\cancel{\{1\}, \{2\}, \{2,3\}}, \{4,5,6\}$

(3) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

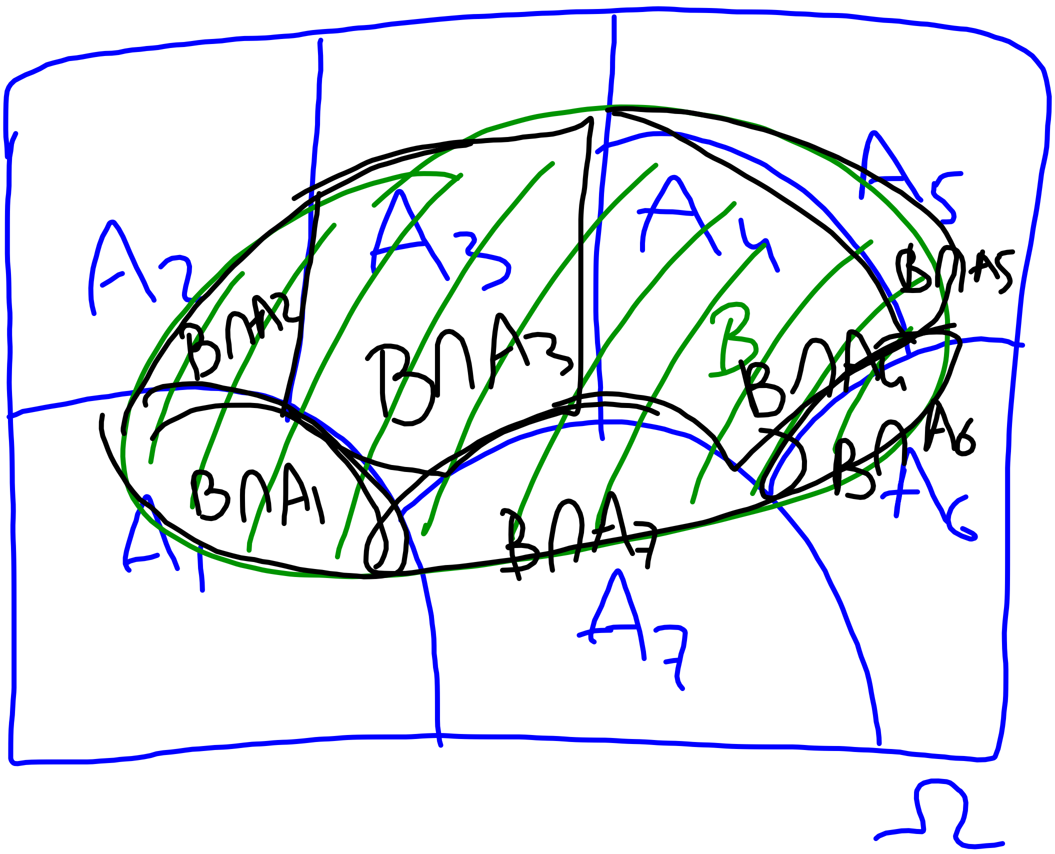
vollst. ES

(4) $\{1,3,5\}, \{4,2,6\}$

vollst. ES

(5) $\cancel{\{1,2\}, \{3\}}, \{5\}, \{6\}$

? $\{4\}$?



G. Allgem:

$$\boxed{P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Sei B ein beliebiges Ereignis zu V und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges Ereignissystem.
Dann gilt:

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + \ldots + P(B|A_n)\cdot P(A_n)$$

Bew: $P(B) =$

$$= P((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_n))$$

disjunkt, weil A_i disjunkt

$$= P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \ldots + $$

$$+P(B \cap A_n) - 0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k), \quad \text{q.e.d.}$$

$$P(B|A_k) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(A_k)}$$

$$P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)) =$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) -$$

$$- P((B \cap A_1) \cap (B \cap A_2))$$

$\cap$ ist assoziativ und kommutativ

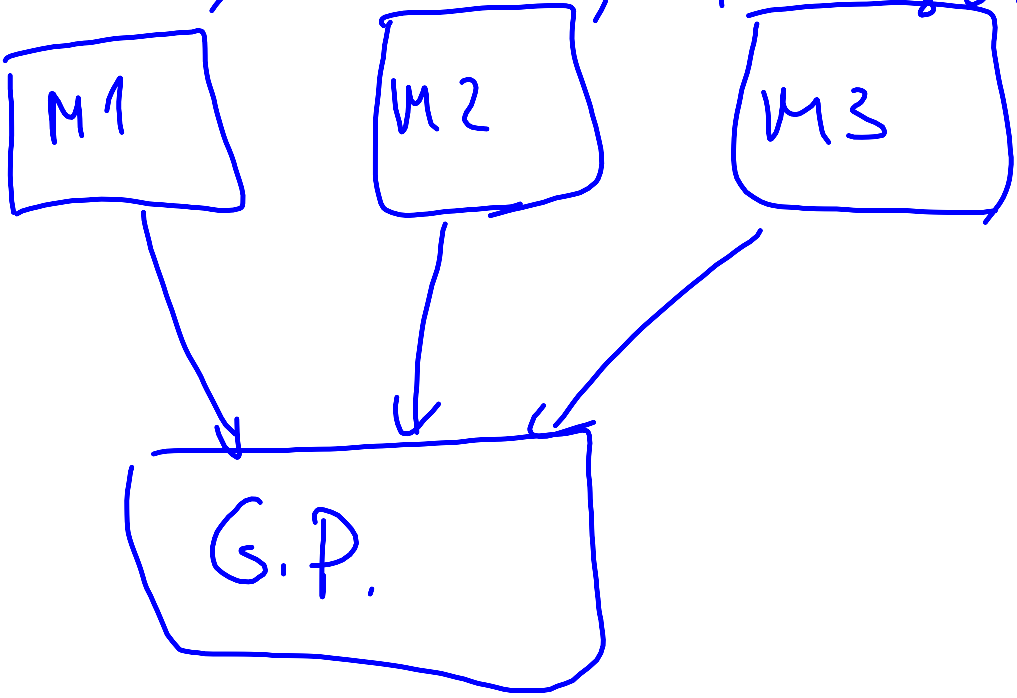
$$\Rightarrow P(B \cap A_1 \cap B \cap A_2) =$$

$$= P(\underbrace{(B \cap B)}_{=B} \cap \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{=\emptyset}) =$$

$$= P(B \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0$$

Bsp. Ein Produkt wird von 3 versch. Maschinen hergestellt.
Maschine 1 produziert die Hälfte, Maschine 2 und 3 jeweils 1/4 der Gesamtproduktion.
Außerdem ist bekannt, dass von Maschine 1 1% aller fehlerhaften Teile stammen, von Maschine 2 2% und von Maschine 3 3%.

a) Wie groß ist der Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion? → Wahrsch., daß ein Teil Fehler hat?



$$P(M_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(M_2) = \frac{1}{4} = P(M_3)$$

$P(F|M_1) = 0{,}01$

$P(F|M_2) = 0{,}02$

$P(F|M_3) = 0{,}03$

M_1, M_2, M_3 bilden ein vollst. ES.

$\Rightarrow P(F) = P(F|M_1) \cdot P(M_1)$
$+ P(F|M_2) \cdot P(M_2) +$
$+ P(F|M_3) \cdot P(M_3) =$

$$= 0{,}01 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}02 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}03 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= 0{,}0175$$

$\Rightarrow$ 1,75% der Teile sind fehlerhaft

b) Ich habe ein defektes Teil entdeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses von Maschine 1 produziert wurde?

→ Zusatzinformation
→ Bedingung "Fehler"

$$\cancel{P(F|M_1)\cdot P(M_1)}$$

Def. der Bed. W.

$$P(M_1|F) = \frac{P(M_1 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|M_1)\cdot P(M_1)}{P(F)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}5}{0{,}0175} = 0{,}2857$$

Wieder Def. der bed. Wahrsch.

$$P(M_1 \cap F) = P(F|M_1)\cdot P(M_1)$$

Formel von Bayes

gegeben: P(A) und P(B|A)

gesucht: P(A |B)

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}}$$

Verallgemeinerung

Sei $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ ein vollst. ES. Dann:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

Aufgabe

Eine Krankheit kommt bei ca. 5% der Bevölkerung vor. Ein Test zur Erkennung der Krankheit führt bei 99% der Kranken zu einer Reaktion, aber auch bei 2% der Gesunden.

1. *In wieviel Prozent aller Fälle tritt bei dem Test eine Reaktion ein?*
2. *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit wirklich hat?*

K = "krank"

T = "Test hat Reaktion gezeigt"

$P(K) = 0{,}05$

$P(T|K) = 0{,}99$

$P(T|\bar{K}) = 0{,}02$

$$P(T) = P(T|K) \cdot P(K) + P(T|\bar{K}) \cdot P(\bar{K}) =$$

weil K und $\bar{K}$ ein vollständiges ES bilden.
(Totale WS)

$$= 0{,}99 \cdot 0{,}05 + 0{,}02 \cdot 0{,}95 = 0{,}0685$$

$$P(K|T) = \frac{P(T|K)\cdot P(K)}{P(T)} =$$

$$= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{0{,}0685} = 0{,}7226$$

25.07.2013

10^{00} – Unterricht

Raum wird bekannt gegeben.

Aufgabe

In Saarbrücken wird im Mittel zu 10% Schwarzgefahren. 70% der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30% gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgästen haben im Mittel 5% ihre Fahrkarte vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?

Aufgabe

50 % einer bestimmten Population seien Frauen, 30 % Männer, 20 % Kinder.
5 % der Männer, 1 % der Frauen und 0,5 % der Kinder seien zuckerkrank.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Person zuckerkrank ist?
b) Sind die Ereignisse “Die Person ist zuckerkrank” und “Die Person ist weiblich” stochastisch unabhängig voneinander?
c) Eine zufällig ausgewählte Person ist zuckerkrank. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person ein Mann?
(Hinweis: Satz von Bayes, Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

Def.: Zufallsgrößen sind zufällige Merkmale, die in einem zufälligen Versuch beobachtet werden und deren Merkmalsausprägungen (Realisierungen) durch Zahlenwerte (direkt oder durch Skalierung) charakterisiert werden.

Uns interessieren folgende Wahrscheinlichkeiten:

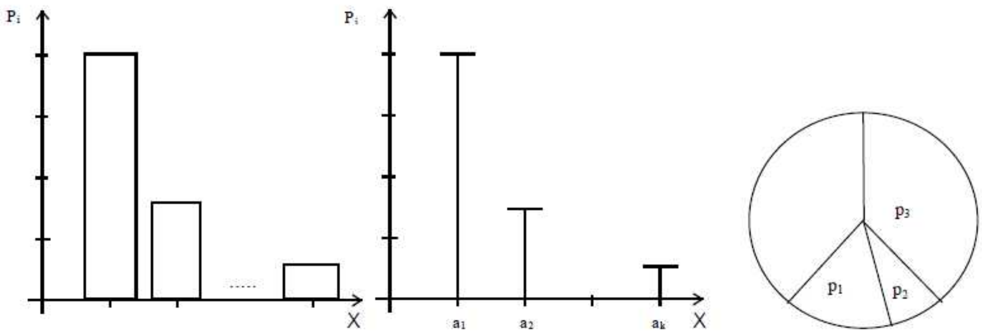
Wahrscheinlichkeitsverteilung diskreter Zufallsgrößen

Einzelwahrscheinlichkeiten:

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Darstellung:

grafisch:



tabellarisch:

X	a_1	a_2		a_k
p_i	p_1	p_2		p_k

Beispiel: Zufallsexperiment: Werfen zweier Münzen

X = "Anzahl Kopf"

Gesucht: Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 maligem Würfeln mindestens 2 Sechsen zu würfeln?

Parameter diskreter Verteilungen

Erwartungswert, Varianz und Verteilungsfunktion

diskrete Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

rel. Häufigkeit

Wahrscheinlichkeit

Arithmetisches Mittel

Streuung