Übungsaufgabe:

1.7 In einem Reaktionszeitversuch V seien folgende Ereignisse von Interesse: A= „Die Reaktionszeit ist größer oder gleich 3 Sekunden“, B=“Die Reaktionszeit ist nicht größer als 5 Sekunden“, C=“Die Reaktionszeit ist größer als 7 Sekunden“, D=“Die Reaktionszeit liegt zwischen 3 und 5 Sekunden (einschließlich 3 und 5)“.

a) Stellen Sie A,B,C,D als Mengen dar!

b) In welcher Relation stehen A und C zueinander?

c) Stellen Sie D aus A und B unter Verwendung von Mengenoperationen dar!

d) Welches Ereignis wird durch die Menge $A \setminus C$ beschrieben? Geben Sie die Menge an!

e) Geben Sie alle Paare disjunkter Ereignisse an, die sich aus A,B,C und D bilden lassen!

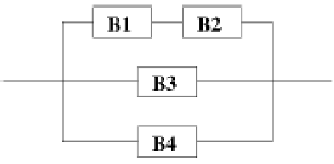
Übungsaufgabe:

1.9* Sei V der zufällige Versuch „Zweimaliger Münzwurf. Ein Versuchsausgang sei durch das Paar $\omega=(M_1, M_2)$, $M_i \in \{K,Z\}$, beschrieben (M_i: Ergebnis des i.ten Wurfes, i=1,2).

a) Geben Sie Ω an!
b) Geben Sie $\wp(\Omega)$ an!
c) Beschreiben Sie die Ereignisse $A=\{(K,K),(Z,K)\}$, $B=\{(K,K),(Z,Z)\}$, $C=\{(K,K), (Z,K), (K,Z)\}$ in Worten!

Übungsaufgabe:

Sei B_i das Ereignis "Bauelement B_i ist O.K", $i = 1, ..., 4$.
G sei das in folgender Skizze dargestellte Gerät:



Das Gerät funktioniert, wenn mindestens eine Reihe funktioniert. Eine Reihe funktioniert, wenn alle Bauelemente der Reihe funktionieren.
Stellen Sie mit Hilfe der Ereignisse B_i und den Mengenoperationen $\cap$, $\cup$, $\setminus$, sowie Komplementbildung folgende Ereignisse dar:

a) *A= "Das Gerät ist O.K."*

b) *B= "Nur B_1 und B_2 sind O.K, die anderen Bauelemente nicht."*

c) *C= "Genau 2 Reihen des Gerätes funktionieren."*

d) *D= "Mindestens ein Bauelement ist O.K."*

e) *E= "Mindestens ein Bauelement ist defekt."*

f) *F= "Höchstens ein Bauelement ist O.K."*

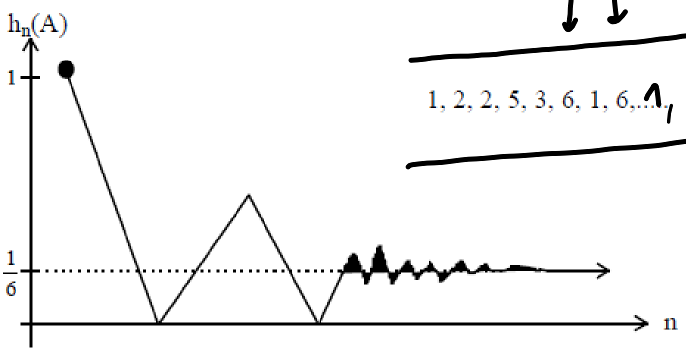
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wie groß ist die Chance, dass ein bestimmtes Ereignis A eintritt?

Eigenschaften der relativen Häufigkeit:

1. $0 \le h_n(A) \le 1, \quad h_n(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0, \quad h_n(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$ (Normiertheit)
2. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad h_n(A) \le h_n(B)$ (Monotonie)
3. $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$ (Additivität)

Würfeln $A = \{6\}$

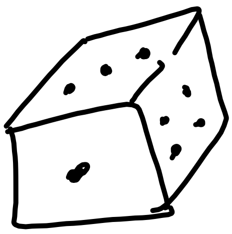


$\#6 = 2$ $\quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$n = 8$

1, 2, 2, 5, 3, 6, 1, 6,... 1, 5, 6, 7, 6, 8, 3, 4, 6 $\quad \frac{5}{17}$

$h_n(\{6\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} p = \frac{1}{6}$



1, 2, 3, 4, 5, 6 $\quad \frac{\#6}{n} = h_n$

$\frac{20}{68} = \frac{5}{17} \quad \frac{1}{4} = \frac{17}{68}$

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Def.: Sei V ein zufälliger Versuch mit der Ereignismenge Ω und sei $\wp(\Omega) = \{A | A \subseteq \Omega\}$ das Ereignisfeld zu V. Dann heißt jede Abbildung $P: \wp(\Omega) \to [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\wp(\Omega)$, falls P folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $0 \leq P(A) \leq 1 \quad , \quad P(\emptyset) = 0 \quad , \quad P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
2. $A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Additivität)
4. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (σ-Additivität)

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

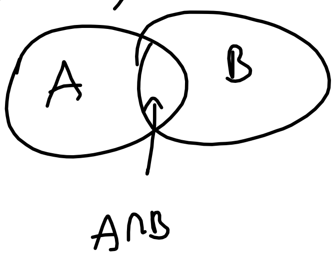
1) $0 \leq P(A) \leq 1$

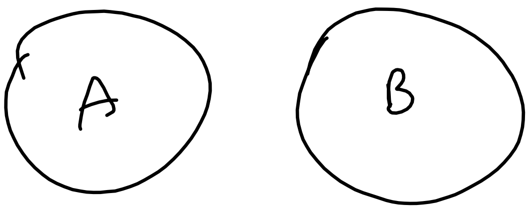
2) $P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$





$A \cap B = \emptyset$

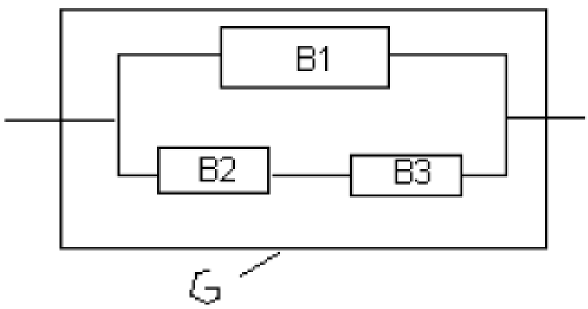
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $\boxed{A \cap B = \emptyset}$

Beispiel:

Sei B das Ereignis B = „Bauelement B ist O.K”, i=1,...3.

G sei das in folgender Skizze dargestellte Gerät:

B_1



- Das Gerät funktioniert, wenn mindestens eine Reihe funktioniert.
- Eine Reihe funktioniert, wenn alle Bauelemente der Reihe funktionieren.

Es sei folgendes bekannt:

- 5 % aller Bauelemente vom Typ B_1 sind defekt
- bei 90% aller Geräte sind sowohl B_2 als auch B_3 OK
- bei 87% aller Geräte sind alle 3 Bauelemente B_1,B_2, B_3 OK.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass G funktioniert und wieviel % aller Geräte sind defekt?

$$P(B_1) = 1 - P(\overline{B_1}) =$$

$$= 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

$$P(B_2 \cap B_3) = 0{,}9$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 0{,}87$$

$$P(G) = P(\text{Reihe 1} \cup \text{Reihe 2})$$

$$= P(B1 \cup (B_2 \cap B_3)) =$$

$$= P(B1) + P(B_2 \cap B_3) -$$

$$- P(B1 \cap B_2 \cap B_3) =$$

$$= 0{,}95 + 0{,}9 - 0{,}87 =$$

$$= 0{,}98$$

Übungsaufgabe:

Beispiel: Die Hochbegabung von Kindern einer bestimmten Alterstufe wird mit zwei Testverfahren ermittelt. bestehen die Kinder beide Tests, so werden sie als hochbegabt eingestuft. Es sei bekannt, dass 1 % der Kinder 97,5% der betrachteten Altersstufe Test 1 (T1) besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind den zweiten Test (T2) besteht, ist 0,02. Insgesamt bestehen 99% weder den ersten noch den zweiten Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kind als hochbegabt eingestuft?

Übungsaufgabe:

1.12 * Bei der Herstellung eines Produktes treten 2 Fehler F1="nicht maßhaltig" und F2="nicht funktionsfähig" mit den Wahrscheinlichkeiten P(F1)=0,01 und P(F2)=0,02 ein. Mit mindestens einem Fehler behaftet sind insgesamt 0,5 % aller Produkte. Ein Produkt ist nur dann verkäuflich, wenn es keinen der beiden Fehler besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt verkäuflich?

Übungsaufgabe:

1.13 * In deutschsprachlichen e-mails tritt das Wort „Viagra“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 auf. Das Wort „Rolex“ tritt in 2 % aller Fälle auf. Mit mindestens einem dieser beiden Worte sind 2,5 % aller e-mails behaftet. Eine e-mail wird nur dann nicht als spamverdächtig klassifiziert, wenn sie keines der beiden Worte enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine e-mail nicht als spamverdächtig eingestuft?

Wo bekommen wir diese gegebenen Wahrscheinlichkeiten her?

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- in Glücksspielen oder Laplace-Versuchen:
  Wahrscheinlichkeiten können exakt als Chance des Eintretens von A bei Durchführung von V ermittelt werden

- die Wahrscheinlichkeit P(A) kann mit Hilfe der beobachteten relativen Häufigkeit $h_n(A)$ abgeschätzt werden:

  -> Stabilität der relativen Häufigkeit

Es gilt: $\underset{n->\infty}{stoch \lim} h_n(A) = P(A)$ (Stochastische Grenzwertbegriff)

- P(A) = 1/6

-> P(A)

- P(A) = 1/6 ~ 0,167 bedeutet auch,

-> P(A)

Umgekehrt liefert eine beobachtete relative Häufigkeit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses. Je größer dabei n ist, desto genauer ist dieser Schätzwert für P(A).

Klassische Wahrscheinlichkeit

Def.: Sei V ein zufälliger Versuch. Wenn für die Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ aller Elementarereignisse gilt:

1. $|\Omega| = m < \infty \quad (\Omega = \text{endlich})$
2. $P(\{\omega_i\}) = p \; \forall i = 1 \ldots m$ (alle $\{\omega_i\}$ sind gleichwahrscheinlich)

dann heißt V *Laplace-Versuch*. (Laplace-Versuche: typisch für Glücksspiele)

Satz: Sei V ein Laplace-Versuch, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ und sei $A \subseteq \Omega$ mit $A = \{\omega_{i1}, \ldots \omega_{il}\}$ $(i, j \in \{1, \ldots, m\})$. Dann gilt:

1. $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m} \forall i = 1, \ldots, m$
2. $P(A) = l : m = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (Chance für das Eintreten von A)