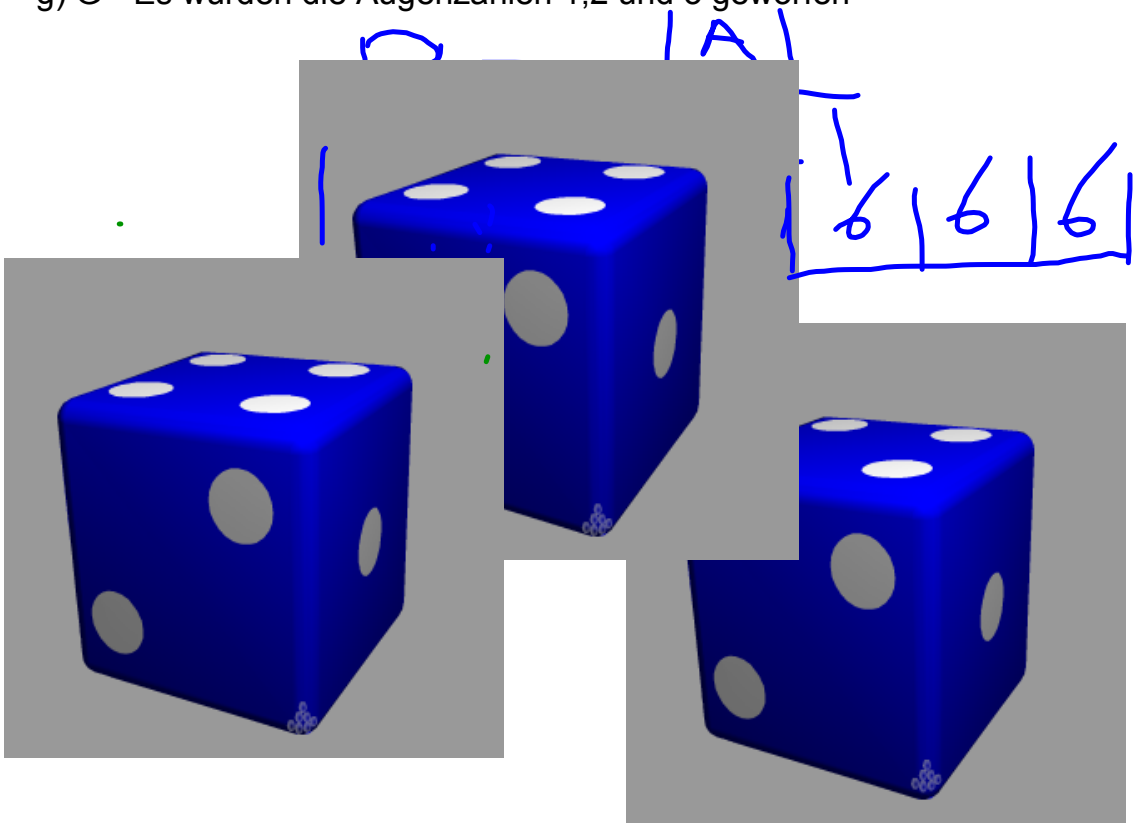
Aufgabe

Würfeln mit 3 Würfeln.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

a) A="Alle Würfel zeigen eine Sechs"
b) B="Alle Augenzahlen sind gleich"
c) C="Alle Augenzahlen sind verschieden"
d) D="Mindestens eine Würfel zeigt eine Sechs"
e) E="Die Summe der Augenzahlen ist Sechs"
f) F="Kein Würfel zeigt eine Fünf"
g) G="Es wurden die Augenzahlen 1,2 und 3 geworfen"



(7)

$$|F| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$$

$$P(F) = \frac{5^3}{6^3}$$

(8) $$P(G) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

(d) $p(D) \neq P(A)$

$\overline{D}$ = "keine 6"

$P(\overline{D}) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6^3}$

$|\overline{D}| = 5^3$

(e) $\{(1,1,4), (1,4,1), (4,1,1), (2,2,2), (3,2,1), (2,3,1), (1,2,3), (3,1,2), (1,3,2), (2,1,3)\}$

$|E| = 10$,

$P(E) = \frac{10}{6^3}$

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

(a) $|A| = 1$

$$P(A) = \frac{1}{6^3};$$

(b) $|B| = 6$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3}$$

(c) $|C| = 6 \cdot 5 \cdot 4$

$\overline{B} \neq C$

$\{1|6|5\}$

$$P(C) = 1 - P(B) =$$

$$= P(\overline{B})$$

$$P(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{20}{36} =$$

$$= \frac{5}{9}$$

Aufgabe "Mississippi"

a) In einer Urne befinden sich die Buchstaben A, U, T und O. Die Buchstaben werden nun nacheinander gezogen (ohne Zurücklegen) und ergeben hintereinander gelegt ein "Wort".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort "Auto" entsteht?

b) In einer Urne befinden sich die Buchstaben A, N, N und A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort "Anna" entsteht?

c) In einer Urne befinden sich die Buchstaben M, I, S, S, I, S, S, I, P, P und I. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort "Mississippi" entsteht?

M — 1
S — 4
I — 4
P — 2

$$|\Omega| = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!}$$

$$P(\text{Mississippi}) = \frac{1}{\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!}} = \frac{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}{11!}$$

(a) $|\Omega| = 4!$

$$P(A) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

(b) $|\Omega| = 4! / (2! \cdot 2!) = 6$

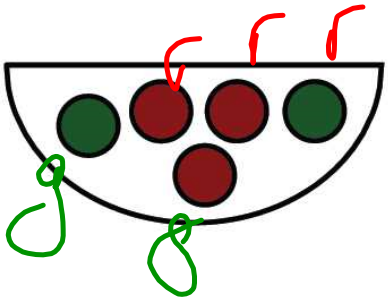
$$P(ANNA) = \frac{1}{6}$$

Mississippi

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bsp.:

Ziehen aus einer Urne:



nacheinander und ohne Zurücklegen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür:

a) beim ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen?
b) beim ersten Zug eine grüne Kugel zu ziehen?

c) beim zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen?
d) beim zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, falls beim ersten Zug eine grüne Kugel gezogen wurde?

$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$

(d)

(a) $P(A) = \frac{3}{5}$

(b) $P(B) = 2/5$

(c) $P(R_1 R_2 \cup G_1 R_2)$

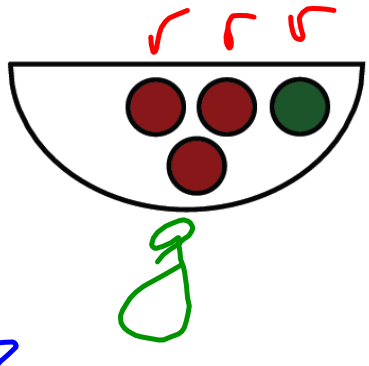
$= P(R_1 R_2) + P(G_1 R_2) -$

$- \underbrace{P(R_1 R_2 \cap G_1 R_2)}_{=0} =$

$= P(R_1 R_2) + P(G_1 R_2) =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$

$= \frac{12}{20}$



(d)

Zusatzinformation

$$P(R_2 \mid G_1) = \frac{3}{4}$$

Bedingung

$$P(G_1 R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

Bsp.:

Werfen eines Spielwürfens.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) eine Sechs geworfen wurde?

b) eine Sechs geworfen wurde, falls wir folgende Zusatzinfo erhalten: es wurde eine gerade Zahl geworfen?

(a) $P(A) = \frac{1}{6}$

$|\Omega| = 6$

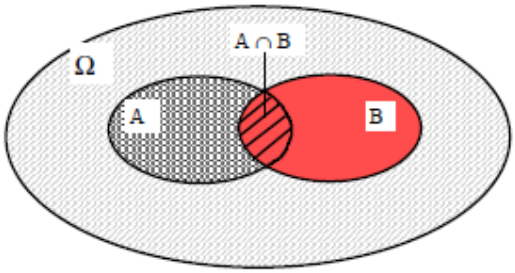
(b) $|\Omega| = 3$

$\Omega = \{2, 4, 6\}$

$B =$ "gerade Zahl"

$P(A \mid B) = \frac{1}{3}$

Interpretation der bedingten Wahrscheinlichkeit:



$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|} \quad ; \quad P(A/B)=\frac{|A\cap B|\cdot\frac{1}{|\Omega|}}{|B|\cdot\frac{1}{|\Omega|}}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$$

P(A / B) $\Rightarrow$ Ω wird auf die Menge B eingeschränkt.

Definition:

Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge und dem Ω Ereignisfeld . Seien zwei beliebige Ereignisse zu V mit P(B)>0. Dann heißt

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

Zeigen Sie anhand der Definitionsgleichung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$ gilt!

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B \setminus (A \cap B))}{P(B)} =$$

[NB: $A \setminus B$: A ohne B

$A \mid B$: A unter B $\subseteq B$]

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - P(A \mid B)$$ ∎

Achtung!

$$P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$$

Bei der Herstellung eines Produktes treten 2 Fehler F1="nicht maßhaltig" und F2="nicht funktionsfähig" mit den Wahrscheinlichkeiten P(F1)=0,02 und P(F2)=0,04 ein. Mit mindestens einem Fehler behaftet sind insgesamt 5 % aller Produkte.

$P(F_1 \cup F_2) = 0{,}05$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt auch den Fehler F2 besitzt, wenn bekannt ist, dass es den Fehler F1 hat!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt den Fehler F2 nicht hat, wenn bekannt ist, dass es bereits den Fehler F1 hat?

a) $P(F_2|F_1) = \frac{P(F_2 \cap F_1)}{P(F_1)} =$

$= \frac{-P(F_1 \cup F_2) + P(F_1) + P(F_2)}{P(F_1)}$

$= \frac{0{,}01}{0{,}02} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ 50%

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)$$

b) $P(\overline{F_2} \mid F_1) =$

$= 1 - P(F_2 \mid F_1) =$

$= 0{,}5$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B \cap C) =$$

$$= P(A) \cdot P(B|A) \cdot$$
$$\cdot P(C|B \cap A) =$$

$$= P(B) \cdot P(B|A) \cdot$$
$$\cdot P(C|B \cap A) =$$

$$= P(B) \cdot P(B|C) \cdot$$
$$\cdot P(B|C \cap A) = \ldots\ldots$$

Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$= P(B|A) \cdot P(A)$$

Multiplikationssatz:

Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Seien $A_i \in \mathcal{E}$ beliebige Ereignisse.

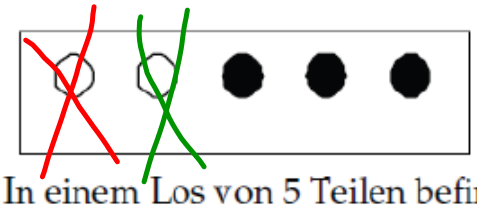
Dann gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot$$

- $P(A_4|A_3 \cap A_2 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot$
- $P(A_n|A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \ldots \cap A_2 \cap A_1)$

Beispiel 1: (Statistische Qualitätskontrolle)



= Defekt

= O.K.

In einem Los von 5 Teilen befinden sich zwei defekte Teile. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim dreimaligen hintereinander Herausnehmen und Prüfen eines Teiles beide defekte Teile zu ziehen?

d_i = "bei i-tem Zug ein defektes Teil"

$$P\left(\left(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3\right) \cup \left(\bar{d}_1 \cap d_2 \cap d_3\right) \cup \left(d_1 \cap \bar{d}_2 \cap d_3\right)\right) =$$

die Ere sind disjunkt

$$= P(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3) +$$
$$+ P(\bar{d}_1 \cap d_2 \cap d_3) +$$
$$+ P(d_1 \cap \bar{d}_2 \cap d_3) =$$

$$P(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3) =$$
$$= P(d_1) \cdot P(d_2 \mid d_1) \cdot P(\bar{d}_3 \mid d_2 \cap d_1)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \bar{A}_1) \cdot$$

$$\cdot P(A_3 \mid A_2 \cap \bar{A}_1) =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \bar{A}_1) \cdot$$

$$\cdot P(A_3 \mid \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Frage: A, B, C nicht disjunkt

$$P(A \cup (B \cup C)) =$$

$$= P(A) + P(B \cup C) -$$

$$- P(A \cap (B \cup C)) =$$

$$= P(A) + [P(B) + P(C) -$$

$$- P(B \cap C)] - P(A \cap (B \cup C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(B \cap C) -$$

$$- P\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(B \cap C) -$$

$$- \left[P(A \cap B) + P(A \cap C) - \right.$$

$$\left. - P((A \cap B) \cap (A \cap C)) \right]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(B \cap C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) +$$

$$+ P\left((A \cap B) \cap (A \cap C)\right) =$$

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) =$$

$$= A \cap B \cap A \cap C =$$

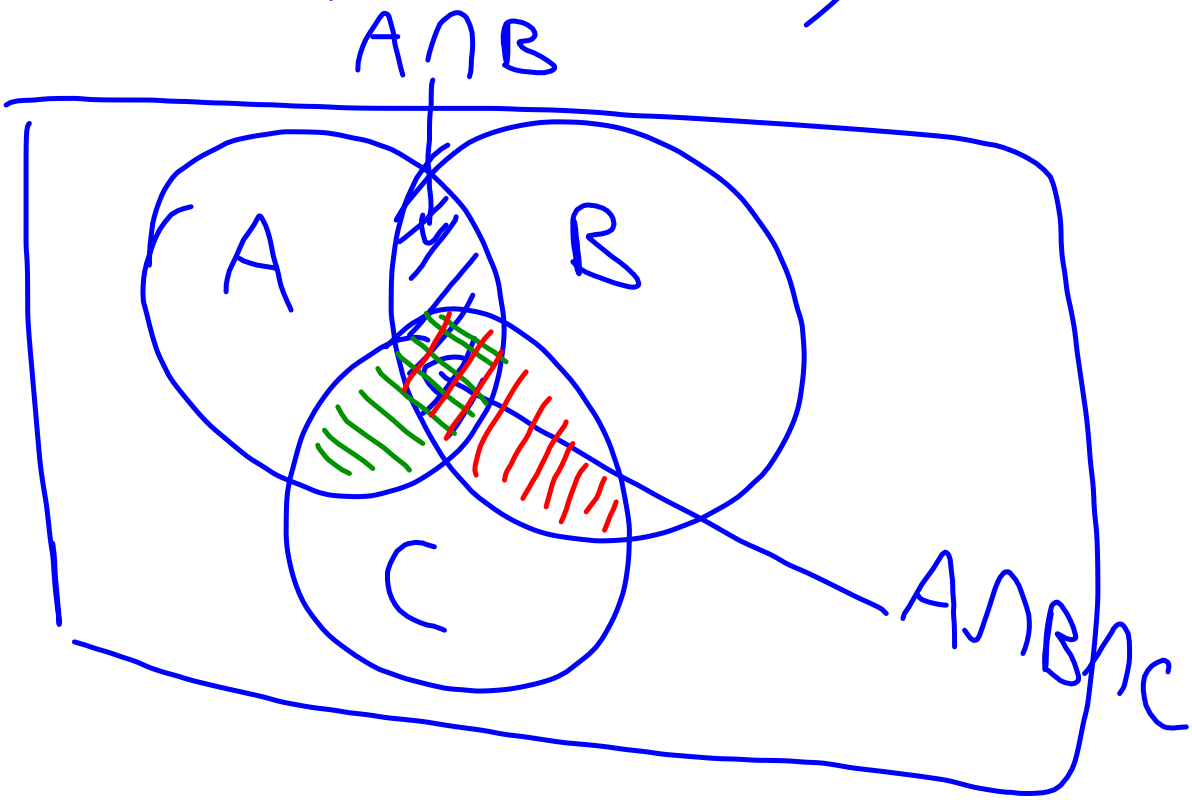
$$= (A \cap A) \cap B \cap C =$$

$$= A \cap B \cap C$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- [P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C)] +$$

$$+ P(A \cap B \cap C).$$



Beispiel 2:

Aus einem gut gemischten Kartenspiel sollen 3 Spieler nacheinander eine Karte ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht jeder Spieler eine Pik-Karte (Ereignis A)?

32 Karten

1.21 * Wir betrachten ein Los von 10 Teilen. Darunter befindet sich ein defektes Teil. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür beim „ dreimaligen Ziehen ohne zurückzulegen“ das defekte Teil zu finden?

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Verändert die Zusatzinformation über das Eintreten von B die Chance für das Eintreten von A nicht, so nennt man A und B stochastisch Unabhängig.

Definition
Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Folgerung: Seien A und B stochastisch unabhängig, dann gelten folgende Beziehungen:

(1) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A)$

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(2) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$

(3) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$

(4) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

Beispiel 16: Zwei Studenten versuchen unabhängig voneinander die gleiche Statistik-Aufgabe zu lösen. Jeder löst die Aufgabe mit Wahrscheinlichkeit 0,6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einer der beiden die Augabe löst?

$S1 =$ "Student 1 löst die Aufgabe"

$S2 =$ "Student 2 löst die Aufgabe"

$P(S1) = 0,6 \quad P(S2) = 0,6$

$$P(S1 \cup S2) =$$

$$= P(S1) + P(S2) -$$

$$- P(S1 \cap S2) =$$

$$= P(S1) + P(S2) -$$

$$- P(S1) \cdot P(S2) =$$

$$= 0,6 + 0,6 - 0,6 \cdot 0,6 =$$

$$= 1,2 - 0,36 = 0,84$$

Definition:

n Ereignisse $A_1, A_2, \cdots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, falls für jede beliebige Teilauswahl $A_{1*}, A_{2*}, \cdots, A_{k*}$ von k Ereignissen aus diesen n gilt:

$$P(A_{1*} \cap A_{2*} \cap \cdots \cap A_{k*}) = P(A_{1*})P(A_{2*}) \cdot \cdots \cdot P(A_{k*})$$

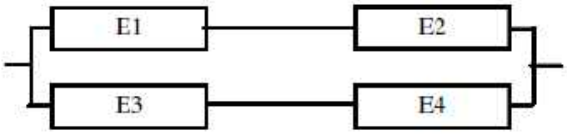
Statistik-Klausur, 10 Aufgaben
Jede Aufgabe hat 3 Antwortalternativen, von denen genau eine richtig ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Student, der rät, alle Aufgaben richtig löst?

Beispiel 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beobachter in einem gewissen Zeitraum ein Signal auf einem Bildschirm übersieht, sei 0,2 und bei allen Beobachtern gleich. Wie viele unabhängig voneinander arbeitende Beobachter
benötigt man, wenn insgesamt die Wahrscheinlichkeit dass ein Signal übersehen wird (Ereignis A), nicht größer als 0,01 sein soll?

Beispiel 2:

Wir wollen von der Ausfallhäufigkeit q des Geräts G auf Ausfallhäufigkeit einer bestimmten Baugruppe E_i (Bauelement) schließen.

Gegeben sei ein Gerät



Seien folgende Ereignisse definiert :

G - Gerät ist OK, $\overline{G}$ -Gerät ist nicht OK,
E_i - Bauelement E_i ist OK, $\overline{E}_i$ - Bauelement Ei ist nicht OK.

Wir vereinfachen dazu unser Modell und treffen folgende Annahmen:

1. Alle Bauelemente sind identisch
2. Alle Bauelemente fallen unabhängig voneinander und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p aus: $P(\overline{E}_i)=p$, i=1,2,3,4.

3. Funktionsweise des Gerätes : Reihe funktioniert, falls beide Baugruppen funktionieren, Gerät funktioniert, falls eine Reihe funktioniert.

   a) Gegeben ist nun $q=P(\overline{G})$. Gesucht ist p.

   b) Wie groß darf die Ausfallwahrscheinlichkeit p eines Bauelenmentes höchstens sein, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gerätes q 10 % nicht überschreitet?

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes

Vollständiges Ereignissystem

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Bsp. Ein Produkt wird von 3 versch. Maschinen hergestellt.
Maschine 1 produziert die Hälfte, Maschine 2 und 3 jeweils 1/4 der Gesamtproduktion.
Außerdem ist bekannt, dass von Maschine 1 1% aller fehlerhaften Teile stammen, von Maschine 2 2% und von Maschine 3 3%.

a) Wie groß ist der Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion?

b) Ich habe ein defektes Teil entdeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses von Maschine 1 produziert wurde?

Formel von Bayes

gegeben: P(A) und P(B|A)

gesucht: P(A |B)



Verallgemeinerung