Fourier-Transformation

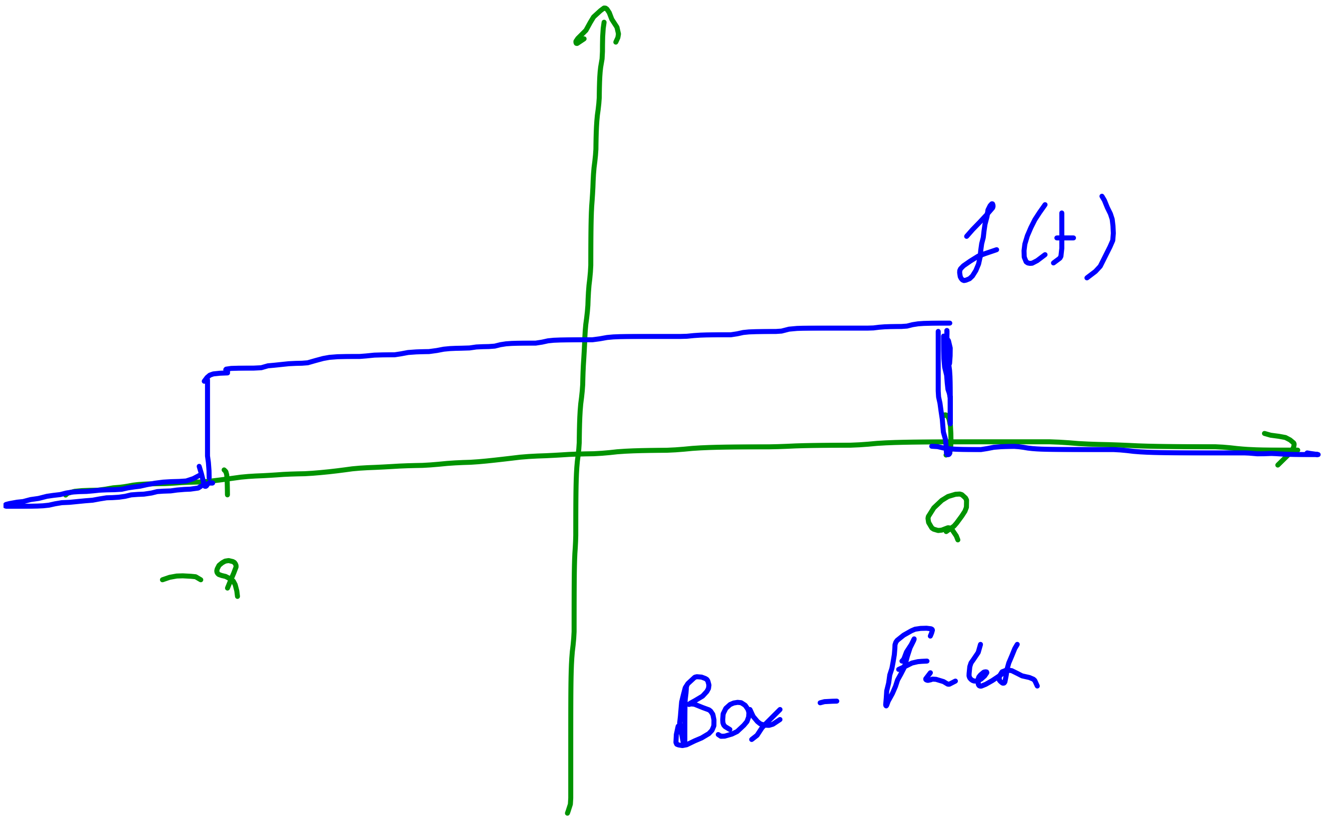
$$f(t) \qquad\qquad F(\omega)$$

$$\underbrace{F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)}_{\text{Fourier-Transformierte von } f(t)}$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(\omega) =$$
$$= \hat{f}(\omega) =$$
$$= \mathcal{F}[f](\omega) =$$
$$= \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$$

Bsp:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , a \geq 0$$



Fläche Endlich

$\Downarrow$

Die hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\mathcal{J}$-Integral ist erfüllt (Fläche beträgt $2a < \infty$).

1) $\omega \neq 0$

$$\Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} 0\, dt + \int_{a}^{+\infty} 0\, dt +$$

$$+ \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t} \Big|_{-a}^{a} =$$

$$= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-ja\omega} - e^{ja\omega}\right) =$$

$$= \frac{e^{a(j\omega)} - e^{-a(j\omega)}}{(j\omega)} =$$

$$= \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}.$$

2) $\omega = 0$:

$$F(\omega=0) = \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-j\overset{0}{\cancel{\omega}} t}\, dt =$$

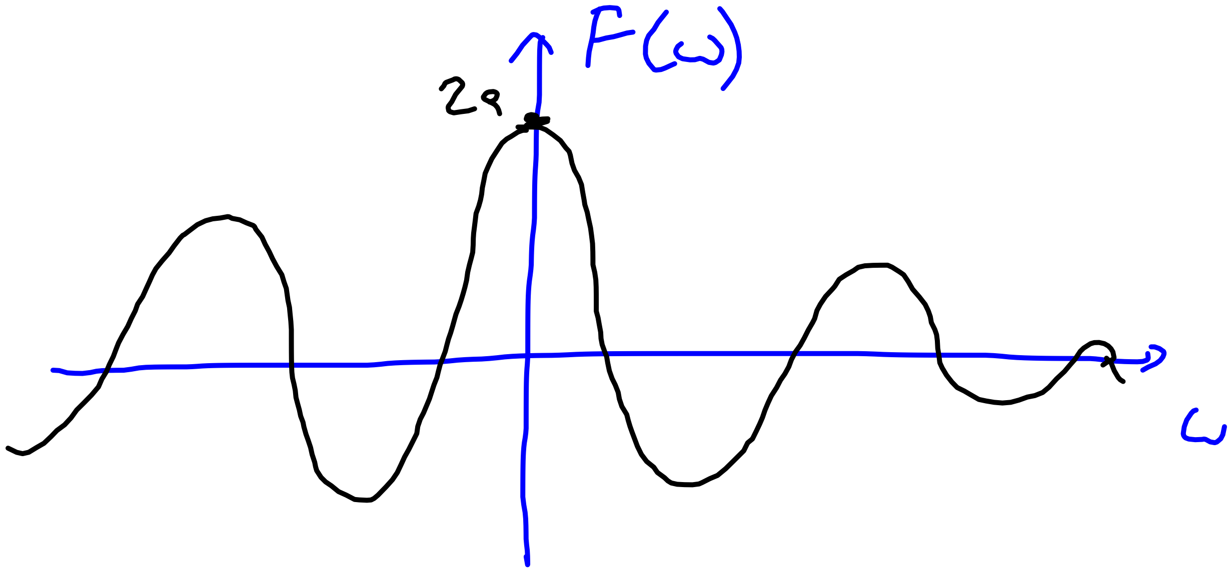
$$= \int_{-a}^{a} dt = 2a$$

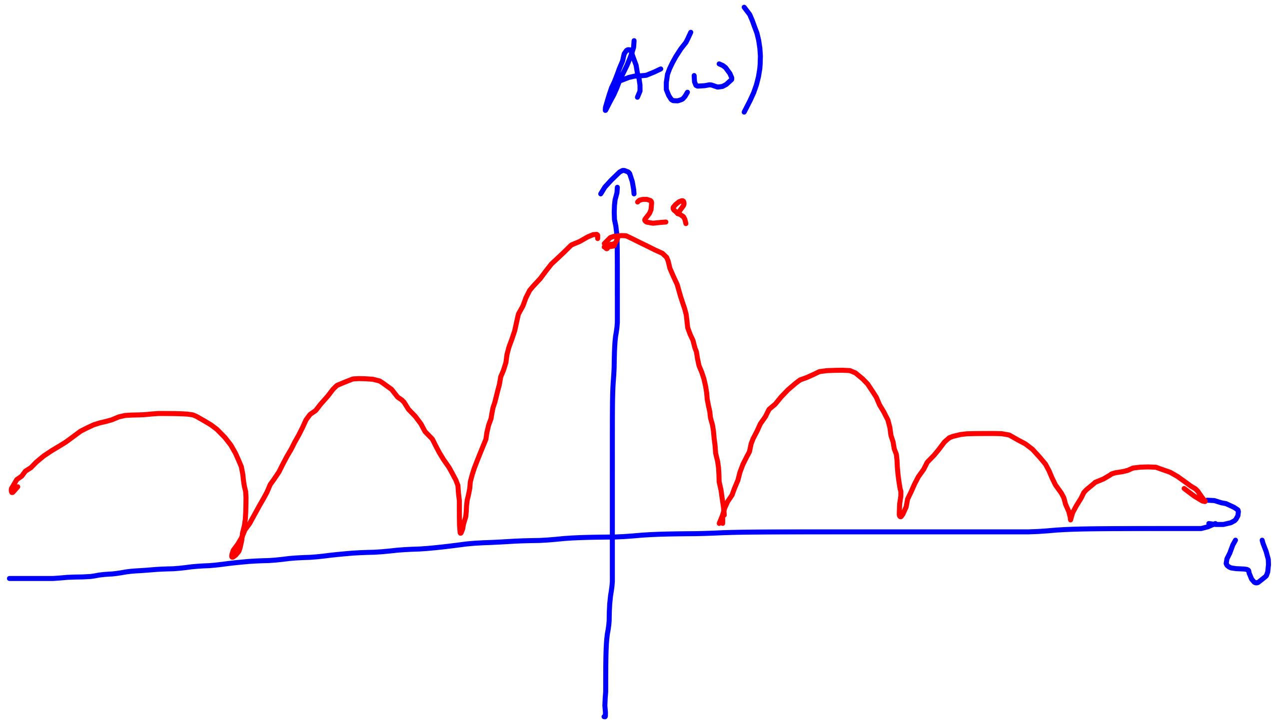
$$F(\omega) = \begin{cases} 2 \, \dfrac{\sin(a\omega)}{\omega} & \omega \neq 0 \\ 2a & \omega = 0 \end{cases}$$

$F(\omega)$ – Bildfunktion

<u>Amplitudenspektrum</u>:

$$A(\omega) = |F(\omega)| = 2 \left| \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \right|$$


F(ω)
2a
ω

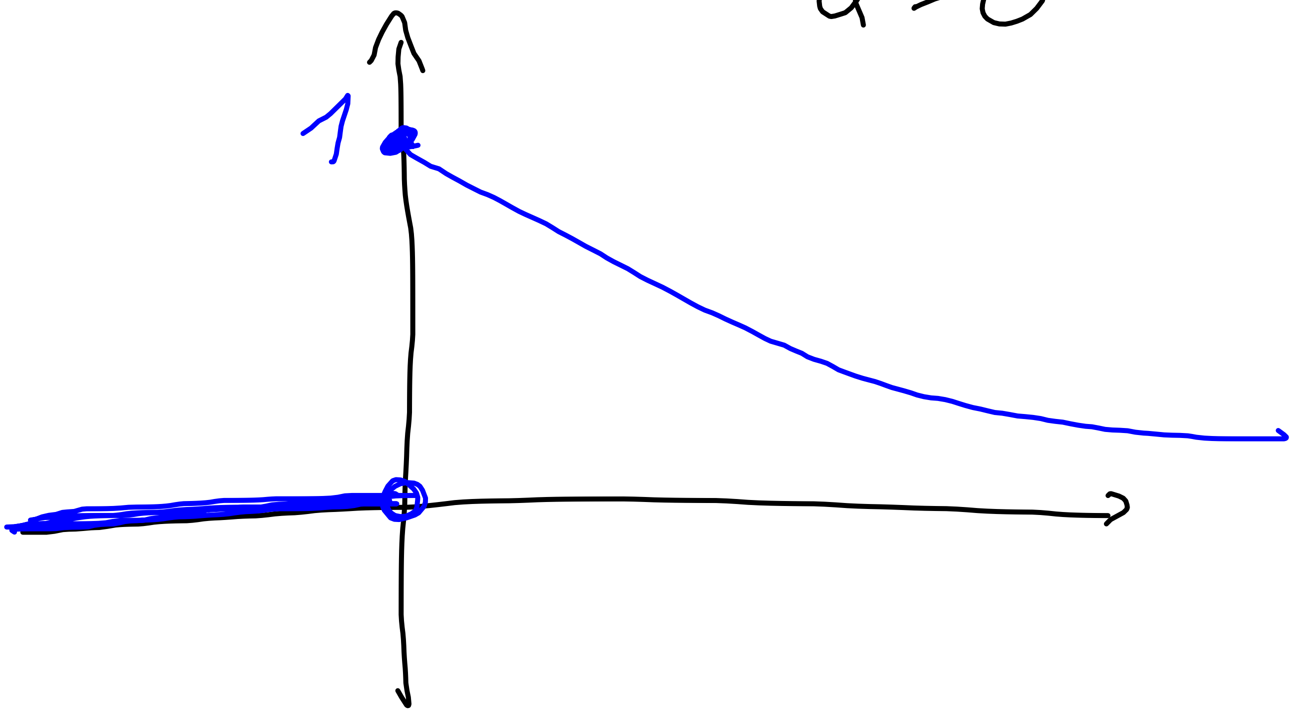

A(ω)
2a
ω

NB: Endliche Ausdehnung im Urbildbereich (Zeitbereich), unendliche Ausd. im Bildbereich (Fourier-Bereich, Frequenz-Bereich)

Bsp:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$a > 0$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\,dt =$$

$$= \left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-a} = \frac{0-1}{-a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} < \infty$$

$\Rightarrow$ Fourier-Transformierte existiert

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Bigg|_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{0 - 1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} =$$

$$= \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

NB: Komplexwertig!

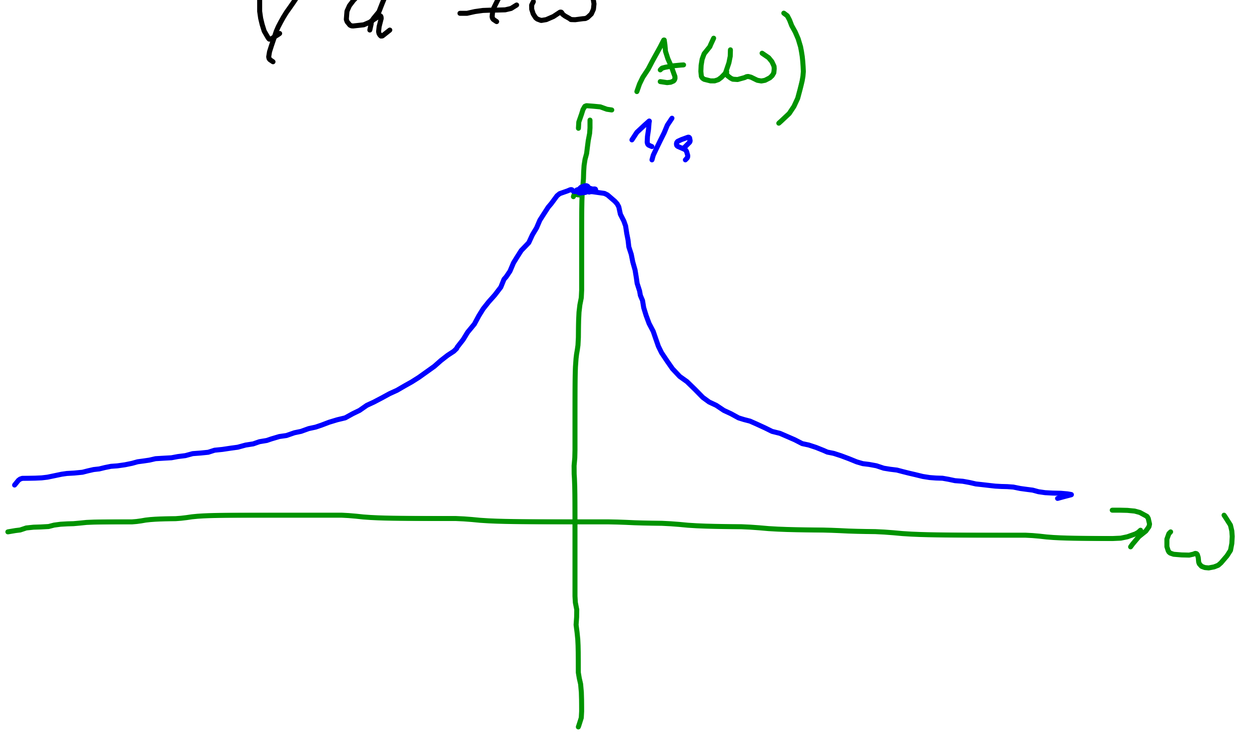
$$A(\omega) = \left| F(\omega) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a + j\omega} \right| =$$

$$= \left| \frac{a}{a^2+\omega^2} - j \frac{\omega}{a^2+\omega^2} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$



<u>Bsp 3</u>:

$$f(t) = e^{-at}, \quad a>0$$

$$t \in \mathbb{R}$$

<u>Endliche Fläche!</u>

hinreichend, aber nicht notwendig!

Trotzdem besitzt $f(t)$ keine Fourier-Transformierte!

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt =$$

$$= \left. \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right|_{t=-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{0 - e^{\infty}}{-(a+j\omega)} = \infty \quad ↯$$

Inverse F-T.

Original-Bereich

Urbild-Bereich

oft auch Zeit- oder Orts-Bereich

t, $f(t)$

F.T. $\mathcal{F}[f]$

Bild-Bereich

Frequenz-Bereich

Fourier-Bereich

ω, $\hat{f}(\omega)$ $=$ $F(\omega)$

$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$

inverse Fourier-Transf.

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f](\omega)\} = f(t)$$

$$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \hat{f}(\omega) = F(\omega)$$

In der Praxis: Tabellen

Aber es gibt auch einen direkten Weg:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

„Inverses Fourier-Integral; Umkehr-Integral"

Fourier-Trafo:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

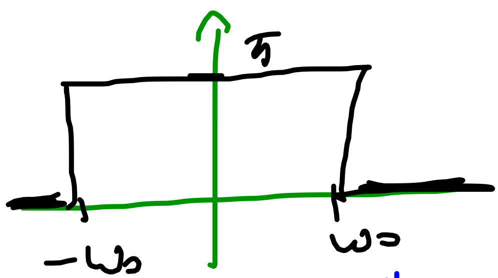
Inverse Fourier-Trafo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega$$

Bsp.: Sei die

Bild funktion

$$F(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

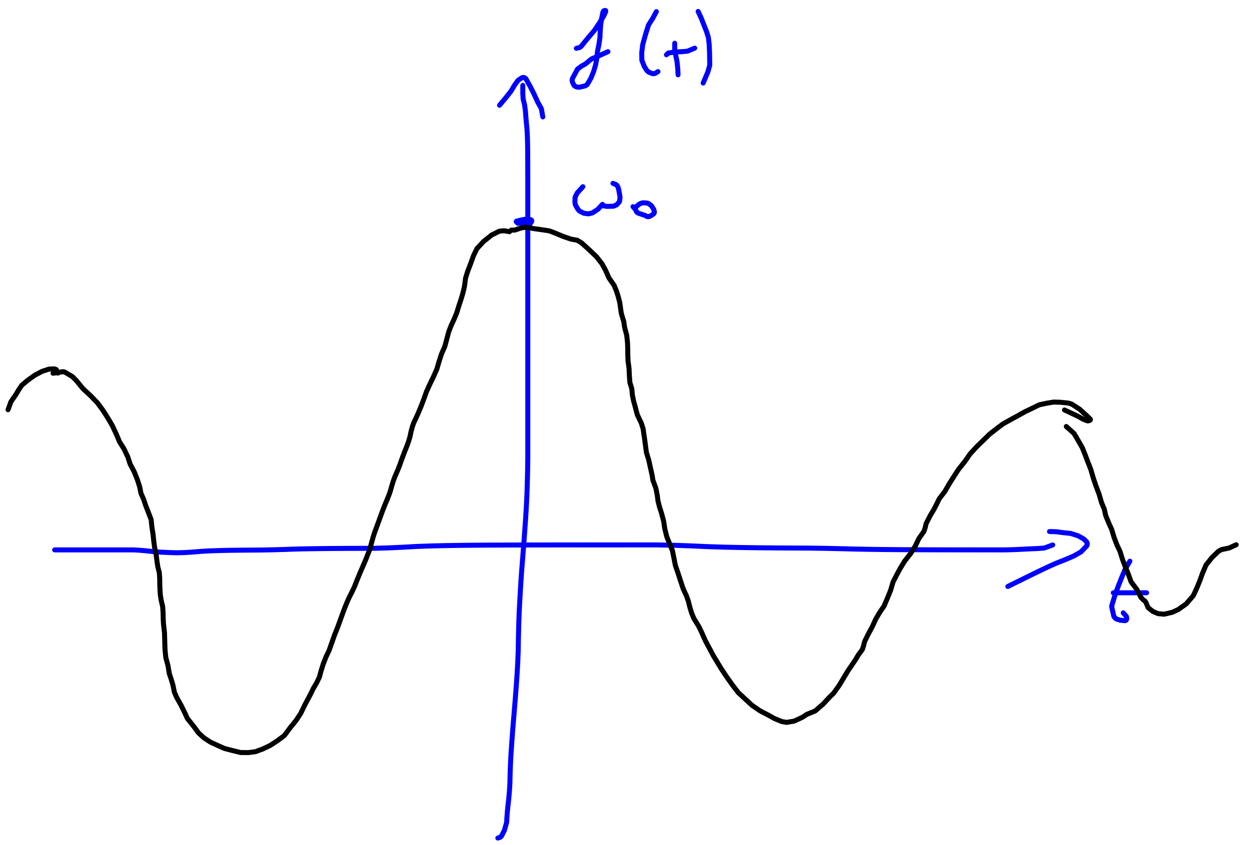
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \pi\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right|_{\omega = -\omega_0}^{\omega_0} =$$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2jt} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$$

$$\left[= \omega_0 \cdot \mathrm{sinc}(\omega_0 t) \right]$$


f(t)
ω₀
t

Die Eigenschaften von Fourier-Integral:

1) Satz 1 (wiederholung)

Ist $f(t)$ absolut integrierbar,
$\left(\text{d.h.} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty\right)$,

so gilt:

$$|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(Also: existiert die Fourier-Transformierte)

Satz 2 (Symmetrie-Eigenschaften der Spektral-Funktion):

Es gilt:

$$F(-\omega) = F^*(\omega).$$

und folglich

$$|F(\omega)| = |F^*(\omega)| =$$

$$= |F(-\omega)|$$

$\Rightarrow |F(\omega)|$ ist

achsensymmetrisch, also gerade.

<u>Folgerung</u>!

1) $Re(F(\omega)) = Re(F(-\omega))$

d.h. $Re(F(\omega))$ ist

achsensym., also gerade

2) $Im(F(\omega)) = -Im(F(-\omega))$,

d.h. $Im(F(\omega))$ ist

punktsym., also ungerade.

<u>Bew:</u>

Es gilt:

$$F^*(\omega) = Re(F(\omega)) - Im(F(\omega))j$$

$$F(-\omega) = Re(F(-\omega)) + j\,Im(F(-\omega))$$

$$\Rightarrow \quad F(-\omega) = F^*(\omega)$$

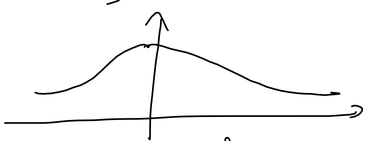
$$\Downarrow$$

$$Re\left(F(\omega)\right) = Re\left(F(-\omega)\right)$$

$$Im\left(F(\omega)\right) = -Im\left(F(-\omega)\right)$$

q.e.d.

Zusammenfassung ?

Eigenschaft	FR	FI
Voraussetzung an $f(t)$	$f(t)$ periodisch, T Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Dirichlet-Bedingungen D_1, D_2	$f(t)$ nichtperiodisch $f(t)$ absolut integrierbar $\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t) \rvert dt < \infty$
FR und FI komplex	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ $c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$
Spektren	$\lvert c_n \rvert$ – Amplitudenspektrum (Linienspektrum)  $\lvert c_n \rvert = \lvert c_{-n} \rvert$	$\lvert F(\omega) \rvert$ – Ampl.-Spektrum $\varphi(\omega)$ – Phasenspektrum  $\lvert F(\omega) \rvert$ gerade $Re(F(\omega))$ gerade $Im(F(\omega))$ ungerade