$$y = (6, 4, 5, 1)^T$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^T$$

Skalierter Mittl. GW

$$a_1 = \int^T b_1 = \frac{1}{2}(6+4+5+1) = 8$$

Tiefe Fr. ohne Lok.

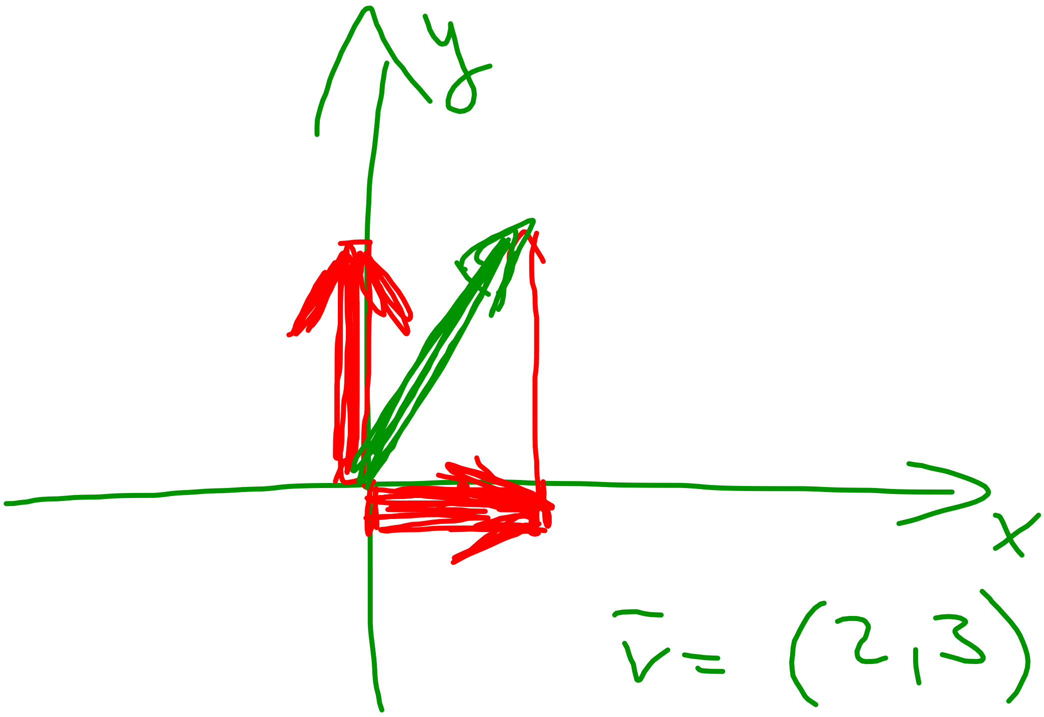
$$a_2 = \int^T b_2 = \frac{1}{2}(6+4-5-1) = 2$$

Hochfr. Anteil in der linken Hälfte

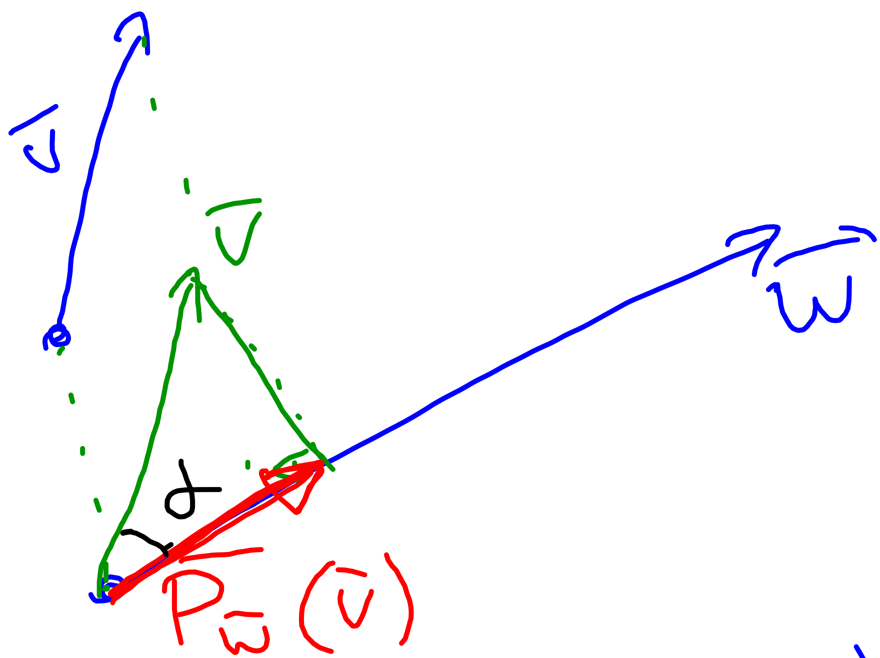
$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(6-4) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(5-1) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Hochfr. Anteil in der rechten Hälfte




Projektionen auf Basisvektoren




$P_{\bar{w}}(\bar{v})$

$$\cos\alpha = \frac{|\overline{P_{\bar{w}}(\bar{v})}|}{|\bar{v}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{v}, \bar{w})}{|\bar{v}|\,|\bar{w}|}$$

$$\frac{|\overline{P_{\bar{w}}(\bar{v})}|}{|\bar{v}|} = \frac{(\bar{v}, \bar{w})}{|\bar{v}|\,|\bar{w}|}$$

$$|\overline{P_{\bar{w}}(\bar{v})}| = \frac{(\bar{v}, \bar{w})}{|\bar{w}|}$$

$$\overline{P_{\bar{w}}(\bar{v})} = \frac{(\bar{v}, \bar{w})}{|\bar{w}|} \cdot \frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} =$$

$$= \frac{(\bar{v}, \bar{w})}{|\bar{w}|^2}\,\bar{w}$$

# Das 1D Haar-Wavelet

- Wellenartige Funktion mit Mittelwert 0; (Mutterwavelet) wird skaliert und verschoben
- Mittl. GW ← noch eine Basisfunktion mit MW ≠ 0 (Skalierungsfunkt)

Katrin. Haar-Wavelet:

- Mutterwavelet:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 , & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1 , & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 , & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\psi_{j,k}(x) := \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$

$\psi_{j,k}$ hat die Breite $2^j$

Höhe $\frac{1}{2^{j/2}}$

Beginnt bei $x = k 2^j$

(1910, Haar)

$$\| \psi_{j,k} \|_2 = 1$$

$$\psi_{jk} \perp \psi_{n,m}$$

wenn $(j,k) \neq (n,m)$

$\psi_{jk} \perp \psi_{nm}$ bzgl.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) \, dx$$

$$\| f \|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$$

- Skalierungsfunktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_{j,k} := \frac{1}{2^{j/2}} \Phi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

# Diskr. Haar-Wavelet

$N = 2^n$

$\downarrow$

N Funktionen

$\Phi_{n,0}$ Skalierung

$\Psi_{n,0}$

$\Psi_{n-1,0}; \Psi_{n-1,1};$

$\vdots$ $\ddots$

$\Psi_{1,0}; \Psi_{1,1}; \Psi_{1,2}; \ldots\ldots \Psi_{1,2^{(n-1)}-1}$

Die Funktionen werden am äquidistanten Gitter an $N$ stellen $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{2N-1}{2} \right\}$

$$\Downarrow$$

Vektoren, die eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^N$ bilden.

Wir identifizieren diese Vektoren und die Treppenf

$\psi_{j,k}$, $\Phi_{j,k}$

In den Bsp:

$$\varphi_{2,0} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$$

$$\psi_{2,0} = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^T$$

$$\psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T; \quad \psi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T$$

# Standardnotation

- $c_{j,k}$ : Koeff. zur Skalierungsfunktion $\varphi_{j,k}$ (c wie "coarse")
- $d_{j,k}$: Wavelet-Koeff. zu $\psi_{j,k}$ (d wie detail)

- Abgespeichert wie folgt (coarse to detail)

$$c_{n,0} \mid d_{n,0} \mid d_{n-1,0} \quad d_{n-1,1} \mid$$

$$\ldots\ldots\ldots \mid d_{1,0} \ldots\ldots \quad d_{1,2^{(n-1)}-1}$$

Erwartete Kompl.

$O(n^2)$

$\exists$ Alg. mit

$O(n \log n)$?

$\Downarrow$

# FWT

$$\varphi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{j-1,2k} + \varphi_{j-1,2k+1}\right)$$

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{j-1,2k} - \varphi_{j-1,2k+1}\right)$$

$$f_k = f^T \varphi_{0,k} \quad (k = 0, \ldots, N-1)$$

$$c_{j,k} = f^T \Phi_{j,k}$$

$$d_{j,k} = f^T \Psi_{j,k}$$

$$\Downarrow$$

- für $j = 1, \dots, n$

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1} \right)$$

$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1} \right)$$

ausgehend von

$$c_{0,k} = f_k \,, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Noch besser, als

$O(N \log N)$!

$\Downarrow$

$O(N)$

# Rücktrafo $(FWT^{-1})$

$$\varphi_{j,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{j+1,k} + \psi_{j+1,k}\right)$$

$$\varphi_{j,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{j+1,k} - \psi_{j+1,k}\right)$$

$$j = n-1 \longrightarrow j = 0$$

$$c_{j,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{j+1,k} + d_{j+1,k}\right)$$

$$c_{j,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{j+1,k} - d_{j+1,k}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f = c_{0,k}$$

# Punktoperation

$$\varphi: f(x,y) \longrightarrow \varphi(f(x,y))$$

örtlicher Kontext
wird nicht berücks.

# Lineare (affine) GW-Transformation

$$g(x,y) = a \cdot f(x,y) + b$$

Kontrastop's "Licht"op's

| | a | b |
|---|---|---|
| (1) Identität | 1 | 0 |
| (2) Kontrasterhöhung | $a > 1$ | irrelevant |
| (3) Kontrastreduktion | $a < 1$ | irrelevant |
| (4) Aufhellung | $a = 1$ | $b > 0$ |
| (5) Abdunkelung | $a = 1$ | $b < 0$ |
| (6) Bildumkehrung | $a = -1$ | $b = g_{max}$ |

# Nichtlineare Transformation

(1) Binarisierung:

$$\varphi(g(x,y)) = \begin{cases} g_{max}, & g(x,y) \geq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(2) logarithmische Dynamikkompression

$$\varphi(f(x,y)) = c \log(1 + |f(x,y)|)$$

# $\gamma$-Korrektur

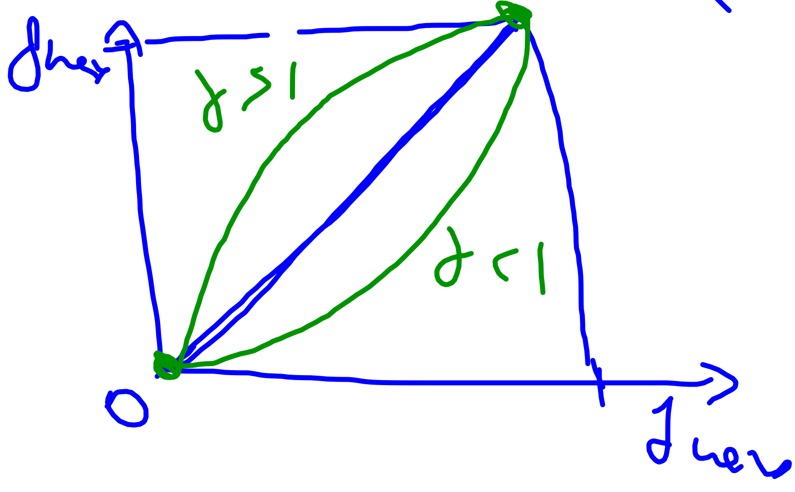
$$I \rightsquigarrow I^{\gamma}$$

$$\gamma = 0{,}4$$

(Videokamera)

$$g \in [0, g_{max}]$$

$$\varphi(g(x,y)) = g_{max} \left( \frac{g(x,y)}{g_{max}} \right)^{1/\gamma}$$



Histogrammegalisierung

(histogram equalisation)

Histogramm → relative Häufigkeiten der GW im Bild

# Algorithmus

$p_i$ : Zahl der Pixel von $f$ mit GW $z_i$

$q_i$ : gewünschte Zahl der Pixel von $g$ mit GW $z_i$

- Beginne links im Histogramm von $g$. Suche erst GW mit der Nummer $k_1$ mit

$$\sum_{i=1}^{k_1-1} p_i \le q_1 < \sum_{i=1}^{k_1} p_i$$

und bilde GWe $z_1, z_2, \ldots, z_{k_1-1}$ auf GW $\tilde{z}_1$ ab.

- Suche GW mit der Nummer $k_2$ mit

$$\sum_{i=1}^{k_2-1} p_i \leq q_1+q_2 < \sum_{i=1}^{k_2} p_i$$

und bilde $z_{k_1}, \dots, z_{k_2-1}$ auf $\tilde{z}_2$ ab.

- Wiederhole, u.s.w. u.s.f.

## Addition von Bilder

$$g(x,y) = f(x,y) + n(x,y)$$

Falls (!):

- sich das Objekt unter denselben Bedingungen aufnehmen läßt

– das Rauschen ist unkorreliert und hat MW = 0, dann bei der Mittelung von M Bilder

$$\sigma^2 = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |n(x,y)|^2 \, dx\, dy$$

→ führt zum Rauschvarianz

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{M}$$