1D-Fourier-Transform.

kontin.

$$f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}[f(x)](\omega)$$

$$\hat{f}(\omega) \qquad \omega$$

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i 2\pi \omega x}\, dx$$

1D-FT

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](x) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi x\omega} d\omega$$

$i = \sqrt{-1}$

$$z = |z| e^{i\varphi} = a + ib$$

$$z^* = |z| e^{-i\varphi} = a - ib$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

- <u>Fourier - Spektrum:</u>

$$|\hat{f}(\omega)| = \sqrt{Re^2 \hat{f}(\omega) + Im^2 \hat{f}(\omega)}$$

- <u>Phasenwinkel:</u>

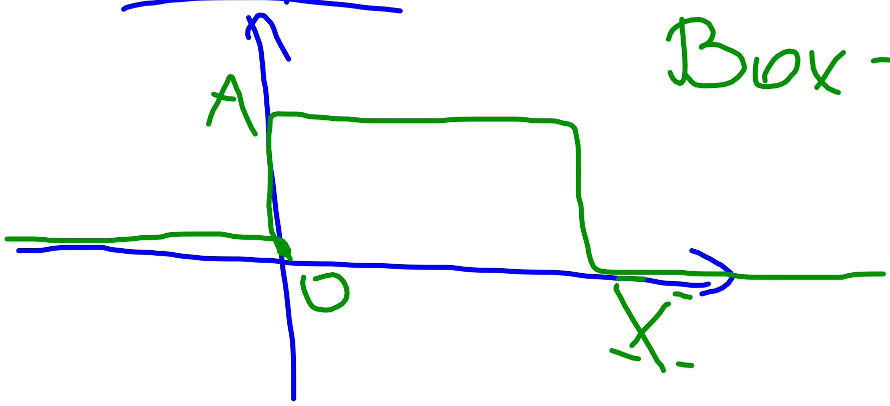
$$\varphi(\hat{f}(\omega)) = \arctan \frac{Im\, \hat{f}(\omega)}{Re\, \hat{f}(\omega)}$$

- <u>Powerspektrum:</u>

$$|\hat{f}(\omega)|^2 = Re^2 \hat{f}(\omega) + Im^2 \hat{f}(\omega)$$

F-Spektrum und Power-Spektrum beschreiben den Frequenzanteil der Frequenz ω im Signal $f(x)$.

Bsp:



Box-Funktion

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi u x}\, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{X} A\, e^{-i2\pi u x}\, dx =$$

$$= A \int_{0}^{X} e^{(-i2\pi u)x}\, dx =$$

$$= -\frac{A}{2\pi u i} \int_{0}^{X} e^{\underbrace{(-2\pi u i)x}_{=y}} \underbrace{(-2\pi u i)\, dx}_{=dy} =$$

$$= -\frac{A}{2\pi u i}\, e^{-2\pi u i x} \Big|_{x=0}^{X} =$$

$$= -\frac{A}{2\pi u i}\left(e^{-2\pi i u X} - 1\right) =$$

$$= -\frac{A}{2\pi u i}\, e^{-\pi u i X} \cdot$$

$$\cdot \left(e^{-i\pi u X} - e^{i\pi u X}\right)$$

$$= -\frac{A}{\cancel{2}\pi u \cancel{i}}\, e^{-\pi u i X}\left(\cancel{-2i}\,\sin(\pi u X)\right)$$

$$= \frac{A}{\pi u}\sin(\pi u X) \cdot e^{-i\pi u X}$$

$$|\hat{f}(u)| =$$

$$= \left| \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u X) \, e^{-i\pi u X} \right|$$

$$= \left| \frac{A}{\pi u} \right| \left| \sin(\pi u X) \right| \cdot \underbrace{\left| e^{-i\pi u X} \right|}_{=1}$$

$$z = a + ib = |z| e^{i\varphi}$$

$$= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right|$$

$$= AX \cdot \operatorname{sinc}(\pi u X)$$

2D-FT

$f(x,y)$

$$\hat{f}(u,v) := \mathcal{F}[f](u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-i2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$$f(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u,v)\, e^{i2\pi(ux+vy)}\, du\, dv$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-\pi 2 i(ux+vy)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i ux} \cdot e^{-2\pi i vy}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i ux}\, dx \right) dy$$

$$= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i ux}\, dx \right)} \cdot e^{-\pi i 2 vy}\, dy$$

Seperabel

Eigenschaften von FT

(kurz)

- Linearität

$$\mathcal{F}[af+bg] = a\,\mathcal{F}[f] + b\,\mathcal{F}[g]$$

- Ähnlichkeitssatz

$$\mathcal{F}[f(ax,by)](u,v) = \frac{1}{|ab|}\,\mathcal{F}[f]\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

Verschiebungssatz

$$\mathcal{F}[f(x-x_0, y-y_0)](u,v) =$$

$$= e^{-i2\pi(ux_0+vy_0)}\mathcal{F}[f](u,v)$$

Phasendrehung;
Spektrum bleibt aber erhalten!
$\Rightarrow$ FT ist translationsinvariant
Zudem ist FT auch
rotationsinvariant.

Faltungssatz

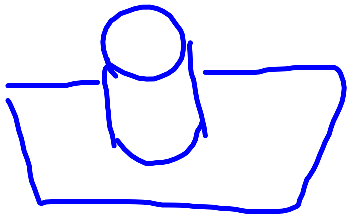
Faltung von f und g in 2D:

$$(f*g)(x,y) := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x',y-y') \cdot g(x',y')\,dx'\,dy'$$

Faltung $\Longleftrightarrow$ lineare Filter

z.B.

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Faltung mit δ:
Mittelung in der Nachbarschaft
von Radius r. (Glättung)

Faltungssatz:

$$\mathcal{F}[f * \delta] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[\delta]$$

- Ableitungssatz:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}\right] =$$

$$= (i2\pi u)^n (i2\pi v)^m \mathcal{F}[f](u,v)$$

- Symmetrien:

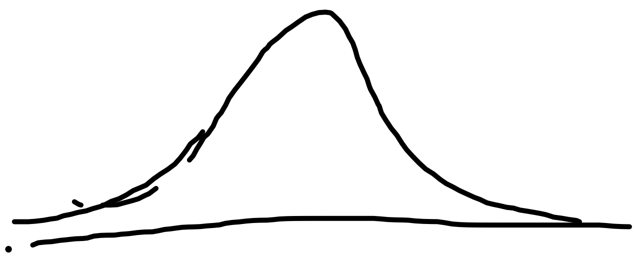
$$\mathrm{Re}\left(\hat{g}(u,v)\right) = \mathrm{Re}\left(\hat{g}(-u,-v)\right)$$

Realteil ist gerade.

Imaginärteil ist ungerade

$$\mathrm{Im}\left(\hat{g}(u,v)\right) = -\mathrm{Im}\left(\hat{g}(-u,-v)\right)$$

- FT einer Gauß-Funktion



$$g(x,y) := \exp\left(\frac{-\pi(x^2+y^2)}{\sigma^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{g}(x,y) = \exp\left(\frac{-\pi(u^2+v^2)}{\sigma^{-2}}\right)$$

Wieder Gaußkern mit reziproker Varianz.

◎ unendlich ausgedehnter Kamm

von δ-Impulsen mit Schritt-

-weite (PeakAbstand) λ:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{f}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{k}{\lambda}\right)$$

δ-Kamm mit reziproken Peak-Abst.

Aliasing, Moire

Satz von Whittacker-Shannon

Abtasttheorem:

Um ein bandbegrenztes Signal korrekt darstellen zu können muss die höchste Frequenz mehr als zweimal pro Periode abgetastet werden:

$$f(u) = 0 \text{ für } |u| > W$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x < \Delta x_{Gren} = \frac{1}{2W}$$

Die Grenzfrequen, ab der Alisg entstehet, nennt man Nyquistfreque.