Erzeugung von Gauß-Rauschen 1:

Standardnormalverteilte Zufallsvariablen (d.h. Gauß-verteilt mit $\mu = 0,\ \sigma = 1$) erzeugt man mit dem **Box-Müller-Verfahren**:

- Ziehe zwei unabhangige, im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsveriablen U und V. Implementierung in C:

$$U = (float)rand()/RAND\_MAX;$$

$$V = (float)rand()/RAND\_MAX;$$

- Berechne

$$N = \sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V)$$

$$M = \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V)$$

Dann sind M und N unabhängige Gauß-verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1.

1D-Fourier

$f(x)$

$$\hat{f}(u) := \mathcal{F}[f](u) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i u x}\, dx,$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\, e^{2\pi i u x}\, du$$

$|\hat{f}(u)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ – Fourier-Spektrum

$\varphi(\hat{f}(u)) = \arctan \dfrac{Im\,\hat{f}(u)}{Re\,\hat{f}(u)}$

Phasenwinkel

⟶ Fourier-Spektrum oder

Powerspektrum

$|\hat{f}(u)|^2 = Re^2\,\hat{f} + Im^2\,\hat{f}$

Bsp: Box-Fktn

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i u x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{x} A e^{-2\pi i u x}\, dx + \int_{x}^{+\infty} 0\, dx =$$

$$= A \int_{0}^{x} e^{-2\pi i u x}\, dx = -\frac{A}{2\pi i u} e^{-2\pi i u x}\Big|_{0}^{x} =$$

$$= -\frac{A}{2\pi i u}\left(e^{-2\pi i u x} - 1\right) =$$

$$= -\frac{A}{2\pi i u} e^{-\pi i u x}\left(e^{-\pi i u x} - e^{\pi i u x}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi u} e^{-i\pi u x} \sin(\pi u x)$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$|\hat{f}(u)| - ?$$

$$|\hat{f}| = \left| \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u x) e^{-\pi i u x} \right| =$$

$$= \left| \frac{A}{\pi u} \right| |\sin \pi u x| \cdot \left| e^{-\pi i u x} \right|$$

Euler form "1"

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$= \left| \frac{A}{\pi u} \right| |\sin \pi u x|$$

$$= \frac{|A|\,|X|}{|\pi u|\,|X|}\left|\sin \pi u X\right| =$$

$$= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right| =$$

$(A, X > 0)$

$$= AX\,|\operatorname{sinc}(\pi u X)|$$

$$\frac{\sin y}{y} = \operatorname{sinc} y$$

2D-Fourier

$f(x,y)$

$\hat{f}(u,v) := \mathcal{F}[f](u,v) :=$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$f(x,y) := \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x,y) :=$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u,v)\, e^{2\pi i(ux+vy)}\, du\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i (ux+vy)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i ux} \cdot e^{-2\pi i vy}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i vy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi i ux}\, dx \right) dy$$

1D - Four. bzgl. x

$\rightsquigarrow g(x,y)$

1D-Fourier bzgl. y von $g(x,y)$

Separabel

Satz (Shannon-Whittaker)

Um ein bandbegrenztes Signal korrekt darstellen zu können, muss die höchste Frequenz mehr als zweimal pro Periode abgetastet werden.

$$\hat{f}(u) = 0 \text{ für } |u| > W$$

$$\Longrightarrow \Delta x < \Delta x_{Gr} = \frac{1}{2W}$$

Die Grenzfrequenz, bei der Aliasing auftreten kann, heißt Nyquist-Freq.