

Übungsblatt 6

Interpolation

Aufgabe 1 *Approximieren Sie $\cos(x)$ auf $[-\pi/2, \pi/2]$ an drei Stützstellen und schätzen Sie den Fehler ab.*

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die vier Punkte $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$ mit verschiedenen Methoden.*

Aufgabe 3 *Vervollständigen Sie das folgende Differenzenschema für ein Newtonsches Interpolationspolynom:*

x	y			
*	-2			
		2		
0	0		-1	
		0		*
1	*		2	
		*		
2	4			

Ergänzen Sie das Schema und geben Sie das Newtonsche Interpolationspolynom an.

Aufgabe 4 *Zur Interpolation einer Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ werde eine äquidistante Zerlegung des Intervalls verwendet, d.h. bei gegebenem $0 < N \in \mathbb{N}$ wählt man $x_k := (2k)/N$ für $k = 0, \dots, N$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall die in der Vorlesung eingeführte Funktion $\omega(x) := \prod_{k=0}^N (x - x_k)$ die folgende Abschätzung erfüllt:*

$$|\omega(x)| \leq (N + 1)! \left(\frac{2}{N}\right)^{N+1} \quad \forall x \in [0, 2].$$

Aufgabe 5 *Die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

soll auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ durch ein Polynom interpoliert werden. Dazu soll das Intervall I durch ein äquidistantes Gitter unterteilt werden, d.h. die Stützstellen der Interpolation sind

$$x_k = -1 + k \frac{2}{N}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Wie muß man N wählen, so daß der Interpolationsfehler auf jeden Fall kleiner als $\epsilon = 10^{-4}$ wird? Benutzen Sie hierbei die aus der Aufgabe 4 bekannte Abschätzung.

Aufgabe 6 Durch eine ungenaue Übertragung der Funktionswerte f_k hat sich in der folgenden Tabelle zur Bestimmung eines **quadratischen** Polynoms ein Fehler eingeschlichen.

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	10	3	0	2	6

Es ist bekannt, daß **genau ein** Funktionswert f_k falsch übermittelt wurde. Formulieren Sie zunächst eine allgemeine und eine speziell auf diesen Fall ausgerichtete Strategie, wie man den fehlerhaften Wert f_k auffinden kann. Benutzen Sie sie dann, um den fehlerhaften Wert herauszufinden und berichtigen Sie den entsprechenden Eintrag in der Tabelle.