

HTW DES SAARLANDES  
Ing.-Wiss. Fakultät, MST/M  
**Numerik & Statistik**  
Prof. Dr. B. Grabowski  
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

## Numerik

### 4. Übungsblatt

**Aufgabe 1** Berechne mit dem **klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** vierstellige Näherungswerte  $y_1, y_2$  für die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^2 - x^2, \quad x \geq 0$$
$$y(0) = 1$$

an den Stellen  $x_1 = 0.1$  und  $x_2 = 0.2$ .

Lösung:

Klassische RK-Verfahren 4. Ordnung hat die Gestalt:

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + h_m/2, y_m + k_1 h_m/2)$$
$$k_3 = f(x_m + h_m/2, y_m + k_2 h_m/2)$$
$$k_4 = f(x_m + h, y_m + h_m k_3)$$
$$y_{m+1} = y_m + h_m(k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6)$$
$$x_0 = 0, \quad y_0 = y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Nun für  $x_1 = 0.1$ :

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = 1.1025 - 0.0025 = 1.1$$
$$k_3 = 1.110525$$
$$k_4 = 1.2244376$$
$$y_1 = 1 + 0.1(k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6) = 1.1107581$$

und für  $x_2 = 0.2$ :

$$k_1 = 1.2237835$$
$$k_2 = 1.3509604$$
$$k_3 = 1.3659052$$
$$k_4 = 1.5158785$$
$$y_1 = 1.2469813$$

**Aufgabe 2** Bestimme alle Runge-Kutta-Verfahren der Gestalt

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & a_{21} & \\ 2/3 & a_{31} & a_{32} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

die die Ordnung 3 haben.

Lösung:

Konsistenzbedingungen (s. Vorlesung):

$$\sum_i b_i = 1 \quad (\text{Ordnung 1})$$

$$\sum_i b_i c_i = 1/2 \quad (\text{Ordnung 2})$$

$$\sum_i b_i c_i^2 = 1/3 \quad \text{und}$$

$$\sum_i b_i a_{ij} c_j = 1/3 \quad (\text{Ordnung 3})$$

→ 4 Gleichungen, 6 Unbekannten. Setzen wir die bekannten Größen aus der Butcher-Schema ein und erhalten:

$$\{b_1 + b_2 + b_3 = 1, \quad 1/2 b_2 + 2/3 b_3 = 1/2, \quad 1/21 b_2 + 4/9 b_3 = 1/3, \quad 1/21 b_2 + 4/9 b_3 = 1/3\}$$

Aus der 2. Gleichung erhalten wir  $b_2 = 1 - 4/3 b_3$ , also:

$$1/4 - 1/3 b_3 + 4/9 b_3 = 1/3$$

$$\Rightarrow b_3 = 3/4$$

$$\Rightarrow b_2 = 1/4$$

Aus der 4. Gleichung folgt nun

$$a_{32} = 4/9$$

$a_{31}$  und  $a_{21}$  bleiben unbestimmt und sind frei zu wählen. Insgesamt erhalten wir eine 2-parametrische Familie der RK-Verfahren der Ordnung 3.

**Aufgabe 3 (Praktische Aufgabe)**

Implementiere (z.B. in MatLab) **Verfahren von Heun** (S. Vorlesung) und vergleiche es mit dem **Polygonzugverfahren von Euler**, indem die praktische Aufgabe von dem Blatt 3 erweitert wird. Stelle deinen Vergleich grafisch dar.