Eigenschaften von FT

Rechenregel

Satz 1: (Linearität):

Für die Linearkombination der n Original-funktionen $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$) gilt:

$$\mathcal{F}\left[\left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n\right)(t)\right](\omega)$$

$$= \lambda_1 \mathcal{F}\left[f_1(t)\right](\omega) +$$

$$+ \lambda_2 \mathcal{F}\left[f_2(t)\right](\omega) +$$

$$- - - - - - -$$

$$+ \lambda_n \mathcal{F}\left[f_n(t)\right](\omega).$$

Dabei:

$$\mathcal{F}\left[f_k(t)\right](\omega) = F_k(\omega)$$

ist die Fourier-Transformierte von $f_k(t)$

Bsp!

$$g(t) = (2+3t)\, e^{-5t}\, \sigma(t) =$$

$$= 2e^{-5t}\sigma(t) +$$
$$+ 3t\, e^{-5t}\sigma(t);$$

$$e^{-at}\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a+j\omega}$$

$$t e^{-at}\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}[2e^{-5t}\sigma(t) +$$

$$+ 3te^{-5t}\sigma(t)] =$$

$$= 2\mathcal{F}[e^{-5t}\sigma(t)] +$$

$$+ 3\mathcal{F}[te^{-5t}\sigma(t)] =$$

$$= \frac{2}{5+j\omega} + \frac{3}{(5+j\omega)^2} =$$

$$= \frac{13 + 2j\omega}{(5+j\omega)^2}$$

Satz 2 (Ähnlichkeitssatz)

$$g(t) = f(at)$$

(Ähnlichkeitstransf.: $t \to at$)

Dann gilt:

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) =$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right), \; a \neq 0$$

wobei $F(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet f(t)$

<u>Bem.!</u>

	Zeitbereich	Frequ.-Ber.
$\|a\| < 1$	Dehnung bzgl $f(t)$	Stauchung der Freq.-Achse
$\|a\| > 1$	Stauchung der Zeitachse	Dehnung der Freq.-Achse
$a = -1$	Richtungsumkehr der Zeitachse $f(-t)$	$F(-\omega)$

Bsp!

$$\boxed{f(t) = e^{-|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}}$$

$$g(t) = e^{-a|t|}\ , \quad a > 0$$

$$G(\omega) - ?$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}\left[e^{-|a|\,|t|}\right](\omega) =$$

weil $a > 0$

$$= \mathcal{F}\left[e^{-|at|}\right](\omega) =$$

$$= \frac{1}{a} F_1\left(\frac{\omega}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\cancel{a}\left(a^2+\omega^2\right)}{a^{\cancel{2}}}} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\boxed{e^{-a|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad a>0}$$

<u>Verschiebung</u>:

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}[f(t-s)](\omega) - ?$$

Laut Def:

$$\mathcal{F}[f(t-s)](\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \stackrel{(1)}{=}$$

$$\boxed{u := t - s; \qquad du = dt} \Rightarrow$$

$$t = u + s$$

$$\stackrel{F}{=} \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-j\omega(u+s)}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} \cdot e^{-j\omega s}\, du =$$

$$= e^{-j\omega s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-j\omega u}\, du =$$

$$= e^{-j\omega s}\, F(\omega)$$

Satz 3 (Verschiebungssatz)

$g(t) = f(t-a)$ und

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ mit

$a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{-j\omega a} \cdot F(\omega)$$

"Verschiebung im Zeitbereich

$\Downarrow$

Dämpfung im Fourier-Bereich"

Bew:

$$A(\omega) = \left| e^{-j\omega q} \cdot F(\omega) \right| =$$

$$= \left| e^{-j\omega q} \right| \cdot \left| F(\omega) \right| =$$

$$= \left| F(\omega) \right|$$

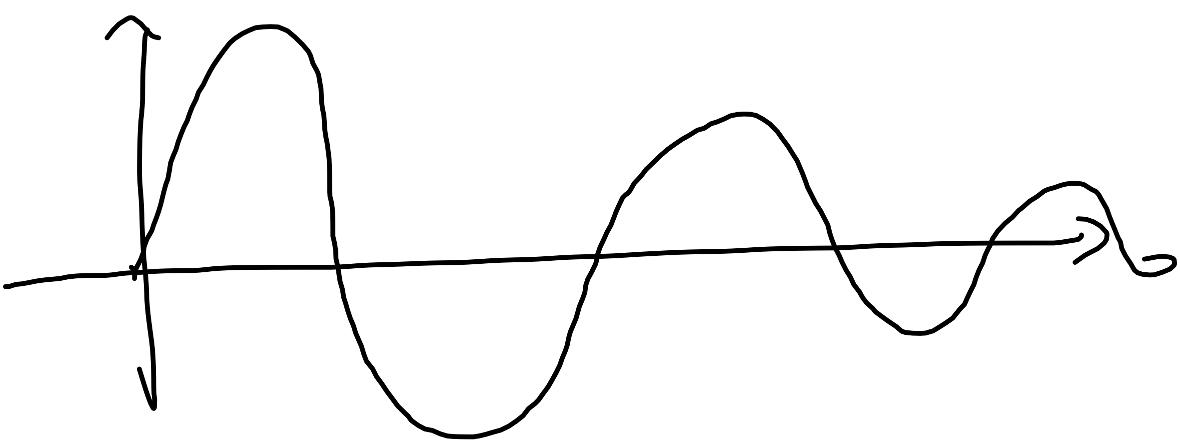
„Fourier-Transformation ist translationsinvariant in Sinne, daß eine Verschiebung das Spektrum nicht ändert.

<u>Bsp!</u> $\delta, \omega_0 > 0$

$$f(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$F(\omega) = \frac{\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$



Die Verzögerung um $a > 0$ im Zeit-bereich $\cancel{f(t-a)}$ führt zu $\boxed{g(t) = f(t-a)}$

$$\mathcal{F}[g(t)](\omega) = e^{-j\omega a}\,\mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

$$= \frac{e^{-j\omega a} \cdot \omega_0}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_0^2}.$$