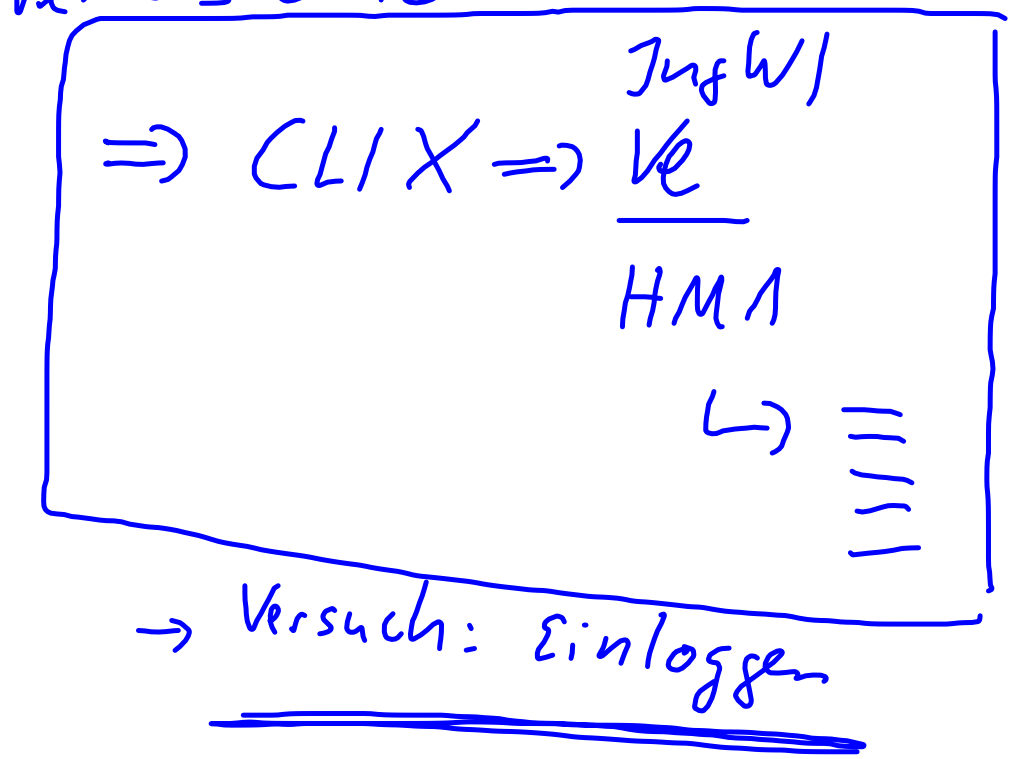
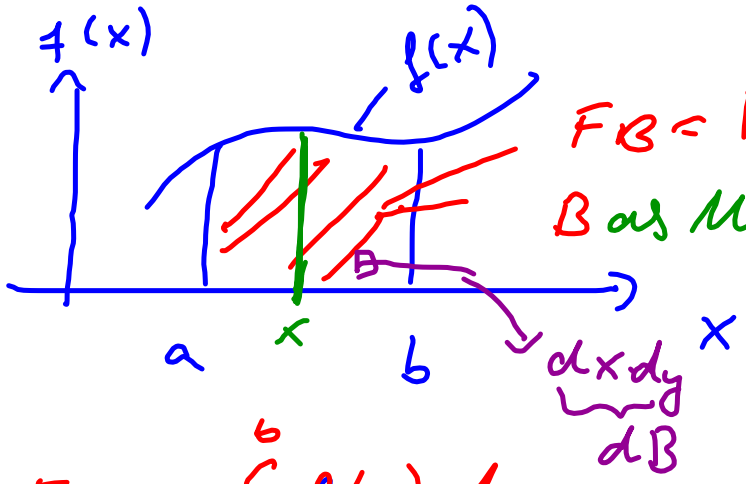
Vl. 29.5.13



→ Versuch: Einloggen

Mehrfachintegrale

(weiter von letzte Wo)



F_B = Fl von B

B als Menge

$$F_B = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \iint_{(x,y)\in B} dB \qquad [dB = dx\,dy]$$

Beh.

Beweis: $B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

$$\Rightarrow \iint_{(x,y)\in B} dB = \int_{x=a}^{b} \int_{y=0}^{f(x)} \underbrace{dx\,dy}_{dB}$$

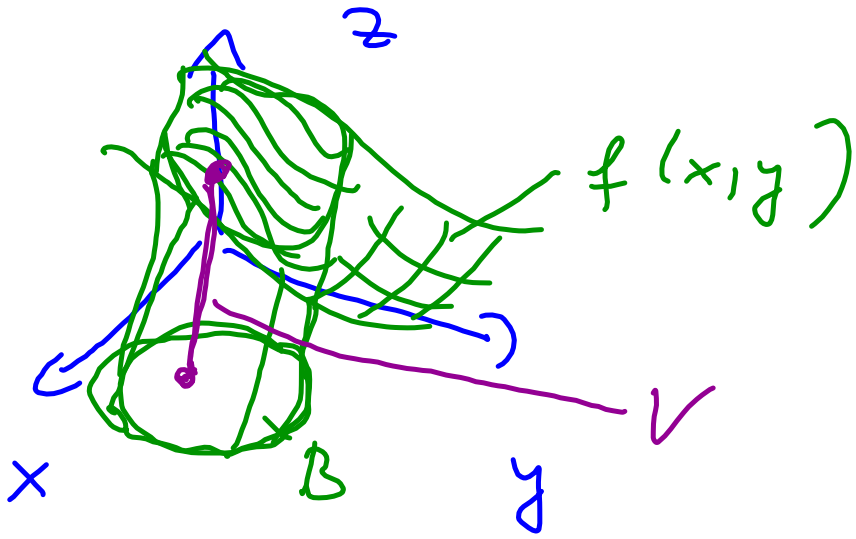
$$= \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=0}^{f(x)} 1\, dy \right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left[y \Big|_{0}^{f(x)} \right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \underbrace{f(x)-0}\, dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx \quad \text{qed}$$

Wir kennen als auch für Volumen unter:



$$V = \iint_{(x,y)\in B} f(x,y)\,\underbrace{dB}_{dx\,dy}$$

oder so

(*)

$$V = \iiint_{(x,y,z)\in K} dV \quad (dV = dx\,dy\,dz)$$

Sinnes Kleines Volumenstückchen

$$K = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$



$f(x,y) = z$

Bessu ist hier (*)

Allgemeine Darstellung von Flächen, Volumen, Schwerpunkten:

Flächeninhalt: Volumen:

$F_B = \iint_{(x,y)\in B} dB$ $V_K = \iiint_{(x,y,z)\in K} dK$

(der Fläche B) des Körpers K

Schwerpunkte: (eines Körpers)

$S = (x_S, y_S, z_S)$ mit

$x_S = \frac{1}{V_K} \cdot \iiint_{(x,y,z)\in K} x\, dK$, $y_S = \frac{1}{V_K} \iiint_K y\, dK$

$z_S = \frac{1}{V_K} \iiint_K z\, dK$

Mittelwert eines Funktion:

$$T: (x,y,z) \in K \longrightarrow T(x,y,z) \in \mathbb{R}$$

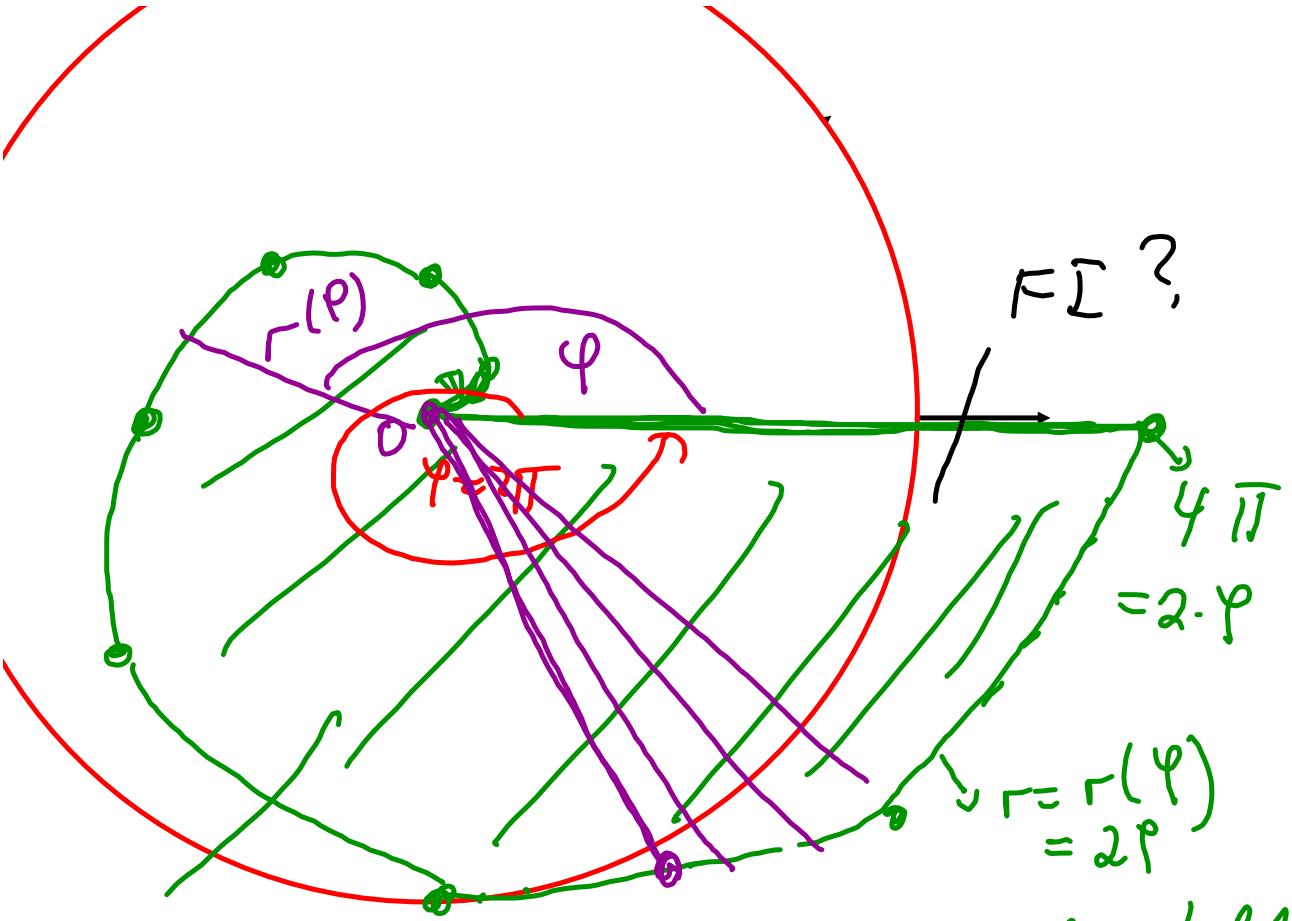
$$\overline{T}_K = \frac{1}{V_K} \iiint_{(x,y,z)\in K} T(x,y,z)\, dK$$

Bsp: Berechnen Sie den Flächeninhalt der archimedischen Spirale!

Polar: $r(\varphi) = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

φ	$r(\varphi)$
0	0
$\pi/4$	$\frac{\pi}{2}$

φ	$r(\varphi)$
$\frac{\pi}{2}$	π


r(φ)
φ
0
φ=2π
FI ?
4π
=2·φ
r = r(φ)
= 2φ
B
Ges: F_B = Flächeninhalt von B

Lösung

$$B = \{ (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le r \le 2\varphi \}$$

$$\Rightarrow F_B = \iint_{(x,y)\in B} dB \to dx \cdot dy \text{ geht nicht}$$

Integraltransformationsformel

(in Vorlesung: kS)

sei

$$T: \vec{u} \in B' \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{x} = \vec{x}(\vec{u}) \in B \subseteq \mathbb{R}^n$$

für die gilt:

$$\det J(\vec{u}) = \left| \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) \right)_{i=1..n}^{j=1..n} \right| \neq 0 \text{ in } \operatorname{int}(B')$$

Dann gilt:

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{\vec{x} \in B} f(\vec{x}) \underbrace{dB}_{dx_1 \ldots dx_n} = \int\int\cdots\int f(\vec{x}(\vec{u})) \, dB' \quad \vec{u} \in B'$$

$$= \int_{\vec{u} \in B'} \cdots \int f(\vec{x}(\vec{u})) \cdot \underbrace{|\det J(\vec{u})| \, du_1 \ldots du_n}_{dB'}$$

Bsp: $\mathbb{R}^1$:

$$I = \int_{\underbrace{x=a}_{B}}^{b} f(x) \underbrace{dx}_{dB}$$

Substi:

$u = u(x)$

$\rightarrow x = x(u)$

$x: a \rightarrow b$

$\Rightarrow u: u(a) \rightarrow u(b)$

$$dx = \left(\frac{dx}{du}\right) \cdot du$$

$$\Rightarrow I = \int_{\underbrace{u=u(a)}_{B'}}^{u(b)} f(x(u)) \underbrace{\frac{dx}{du}}_{|\det J(\vec{u})|} \cdot du$$

dB'

Zurück zu unserem Bsp (Archim. Spirale)

Lösung

$$B = \{ (x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid$$

$$B' \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_B = \iint_{(x,y)\in B} dB \to dx\,dy \quad \text{geht nicht}$$

$$\overset{KT}{=} \iint_{(r,\varphi)\in B'} dB'$$

$$KT: \quad \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \in B' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(\vec{u}) = r\cos(\varphi) \\ y(\vec{u}) = r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in B$$

arch. Spirale

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in B' = \left\{ \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2\varphi \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det J(r,\varphi) = r$$

$$\Rightarrow F_B = \iint_{(x,y)\in B} dB = \iint_{(r,\varphi)\in B'} dB' \overset{\text{ITF}}{=} \iint_{(r,\varphi)\in B'} |r|\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2\varphi} r \, dr \, d\varphi$$

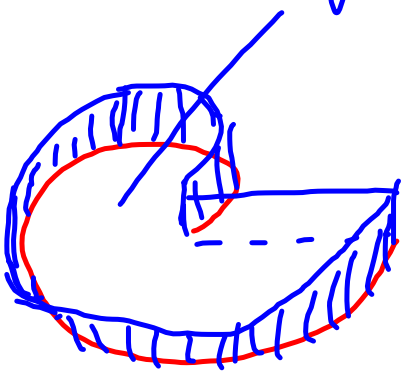
$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\left[\int_{r=0}^{2\varphi} r \, dr \right]}_{\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{2\varphi}} d\varphi$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4\varphi^2 - 0$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\varphi^2 \, d\varphi = \frac{2}{3} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{3}(2\pi)^3 = F_B$$

$$= \frac{16}{3}\pi^3$$



$$V = \iiint_K dV = \iint_{(x,y)\in B} \int_{z=0}^{H} dz\,dB = H \cdot F_B$$

4. Vektor- und Skalarfelder

4.1. Definition und Beispiele

Definition:

Ein Skalarfeld Ω ordnet den Punkten eines Raumes oder einer Ebene in eindeutiger Weise eine skalare Größe zu: $\Omega : \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

$\Omega : \quad (x,y,z) \in R^3 \rightarrow \quad \Omega(x,y,z) \in R \qquad$ räumliches Skalarfeld

$\Omega : \quad (x,y) \in R^2 \rightarrow \quad \Omega(x,y) \in R \qquad$ ebenes Skalarfeld

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ordnet den Punkten eines Raumes oder einer Ebene in eindeutiger Weise einen Vektor zu: $\vec{F} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

$$\vec{F} \quad : \quad (x,y,z) \in R^3 \rightarrow \quad \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} \in R^3 \qquad \text{räumliches Vektorfeld}$$

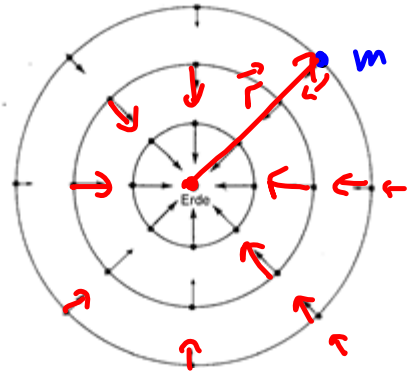
$$\vec{F} \quad : \quad (x,y) \in R^2 \rightarrow \quad \vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \in R^2 \qquad \text{ebenes Vektorfeld}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Bsp für Skalarfelder $\vec{x} = \vec{r}$ (Kurve im $\mathbb{R}^n$: $\vec{r}(t)$, $t_1 \le t \le t_2$

$\Omega(\vec{r}) = T(\vec{r})$ = Temperatur $\Omega(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$

Beispiel 1: **Gravitationsfeld der Erde (Kraftfeld).**



$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{-g \cdot m \cdot M}{|\vec{r}|^2} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

g = Gravitationskonstante
m = Masse des Teilchens (Satellit)
M = Erdmasse
$\vec{r}$ = Abstand und Richtung der Anziehung des Teilchens m durch die Erde M

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

HA: $\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad}\left(K \cdot \frac{1}{|\vec{r}|} \right)$
$K = -g m M$

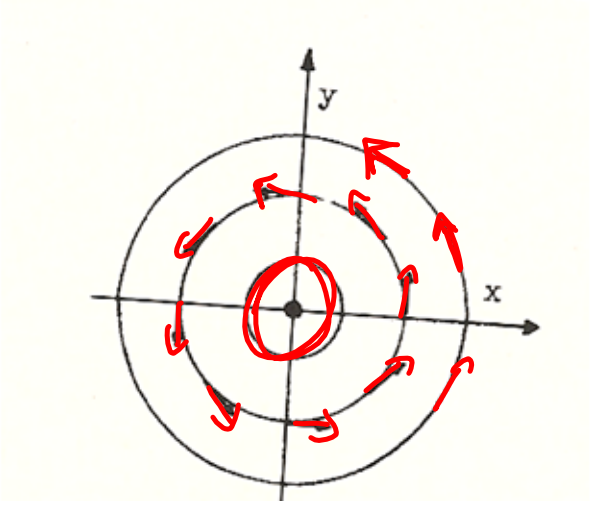
Beispiel 4: Magnetfeld welches durch einen stromdurchflossenen Draht erzeugt wird.

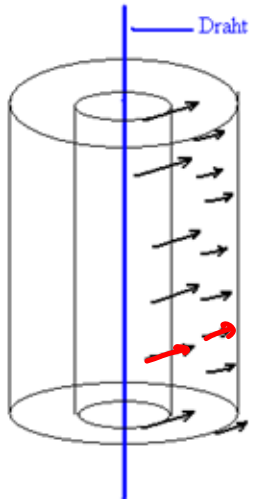
Das Magnetfeld eines (unendlich lang gedachten) stromdurchflossenen Drahtes längs der z-Achse ist außerhalb des Drahtes durch

$$\vec{H}(x,y,z) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (I = Stromstärke). Dieses Vektorfeld liefert in jeder Ebene senkrecht zur z-Achse das gleiche Bild:

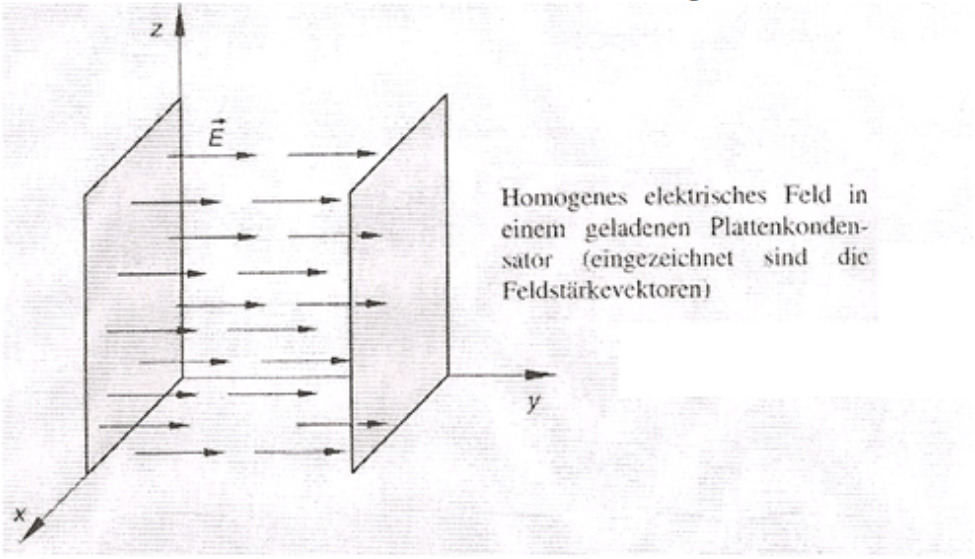
Die Feldvektoren sind Tangentenvektoren an Kreise, die kreisförmigen Feldlinien lassen sich durch Eisenspäne sichtbar machen. Auf den Kreislinien (Zylindermantel) sind die magnetischen Kräfte gleich stark (Äquipotentialflächen), die Kraft nimmt ab, je weiter der senkrechte Abstand von $\vec{r}$ vom Draht ist.





Beispiel 3: Kraftfeld in einem Plattenkondensator.

Im Gegensatz zum Kraftfeld in einem Plattenkondensator, bei dem die Kraftvektoren und damit die Feldlinien senkrecht zu den Platten stehen und parallel verlaufen.



Homogenes elektrisches Feld in einem geladenen Plattenkondensator (eingezeichnet sind die Feldstärkevektoren)

$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt in jedem Punkt des Kondensatorfeldes die ***gleiche Richtung und den gleichen Betrag*** $|\vec{E}| = E_y$. Solche Felder werden als ***homogene Felder*** bezeichnet.

Die allgemeine Darstellung von homogenen Feldern ist die folgende:
$\vec{F}(\vec{r}) = \overrightarrow{const.}$ (Der Feldvektor hat überall die gleiche Richtung und Länge).

Ab hier mit der Vorlesung am 6.6.13 weiter!

4.2. Skalarfelder

Sind reellwertige Funktionen in mehreren Veränderlichen

--> Richtungsableitungen, Gradienten usw. berechnen können!

Widmen wir uns nun den Vektorfeldern

Gradient und Äquipotentialflächen von Skalarfeldern

$\Omega(P) = \Omega(\vec{r})$

für $P(x,y,z)$ bzw. $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- $\operatorname{grad}(\Omega(P)) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}(P), \frac{\partial \Omega}{\partial y}(P), \frac{\partial \Omega}{\partial z}(P) \right)^T$

zeigt von P aus in Richtung des steilsten Anstiegs von Ω

- $\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{a}}(P) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \operatorname{grad}(\Omega(P))$

- $d\Omega(P) = \operatorname{grad}(\Omega(P)) \cdot \vec{dP}$

Def: $\Omega(P)$ heißt Potential des Skalarfeldes Ω im Punkt P.

Auch Potentialfunktion

4.3 Potentialfelder

Definition

(Potentialfeld, Potentialfunktion und Äquipotentialfläche)

.

Beispiele:

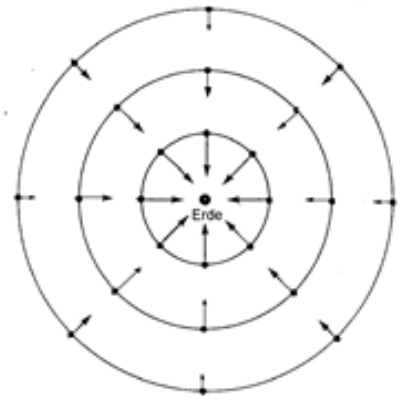
Wie berechnet man Potentialfunktionen?

Def: Alle Punkte $P \in \mathbb{R}^3$ mit $\Omega(P) = C$ (konstant) bilden eine (C-) Niveau- bzw. Äquipotentialfläche.

Für $\forall P \in \mathbb{R}^2$ mit $\Omega(P) = C$ sagen wir, daß diese Punkte (C-) Niveau- bzw. Äquipotentiallinie bilden.

Beispiel 1:

Sei $\Omega(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ das Skalarfeld, was jedem Punkt P im Weltraum mit d Ortsvektor $\vec{r}$ (vom Erdmittelpunkt aus gesehen) das Reziproke seines Abstandes $|\vec{r}|$ vom Erdmittelpunkt zuordnet.



Die Äquipotentialflächen sind Kugeloberflächen von Kugeln mit dem Radius $|\vec{r}|$=c

Weiterhin gilt:

$$grad(\Omega(\vec{r})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial\Omega}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{|\vec{r}|^3} \\ -\frac{y}{|\vec{r}|^3} \\ -\frac{z}{|\vec{r}|^3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

D.h., die Richtung des stärksten Zuwachses des Skalarfeldes ergibt sich vom Punkt P aus in Richtung Erdmittelpunkt.

Bemerkung: $grad(\Omega(\vec{r}))$ ist ein radialsymmetrisches Vektorfeld.

Woran erkennt man, ob ein Vektorfeld ein Potentialfeld ist?

Potentialfeld $\vec{F}$ ist ein Vektorfeld so daß Potentialfunktion $\Omega(P)$ mit

$$\operatorname{grad}(\Omega) = \vec{F}.$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\left(\Omega\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$F_1(x,y,z) = \frac{\partial \Omega(x,y,z)}{\partial x}$$

$$F_2(x,y,z) = \frac{\partial \Omega(x,y,z)}{\partial y}$$

$$F_3(x,y,z) = \frac{\partial \Omega(x,y,z)}{\partial z} \qquad (*)$$

$$\Omega(x,y,z) = \int F_1(x,y,z)\,dx + C_1(y,z)$$

$$\Omega(x,y,z) = \int F_2(x,y,z)\,dy + C_2(x,z)$$

$$\Omega(x,y,z) = \int F_3(x,y,z)\,dz + C_3(x,y)$$

$$\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Omega(x,y,z)}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,z) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} F_3(x,y,z) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} F_3(x,y,z) \quad (4.8)$$

Satz

Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein räumliches Vektorfeld auf $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

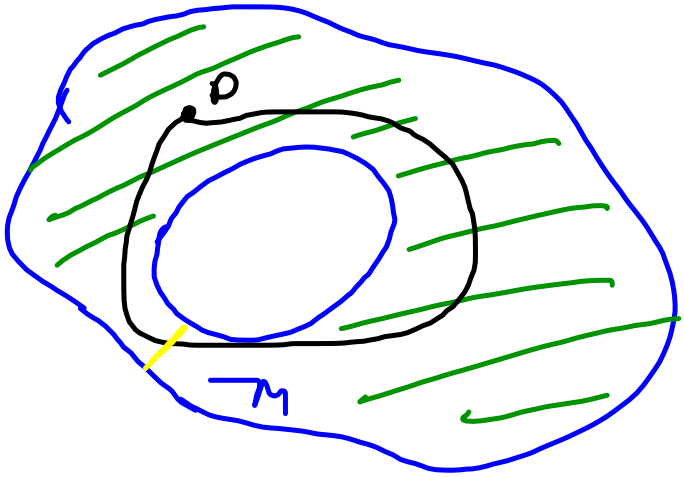
(1) Wenn $\vec{F}(x,y,z)$ ein Potentialfeld ist, so gelten die Gleichungen (4.6), (4.7), (4.8) auf M.

(2) Wenn (4.6), (4.7), (4.8) nicht für alle $\vec{r} = (x,y,z)^T$ auf M erfüllt sind, so ist $\vec{F}(x,y,z)$ kein Potentialfeld auf $M \subseteq \mathbb{R}^3$.

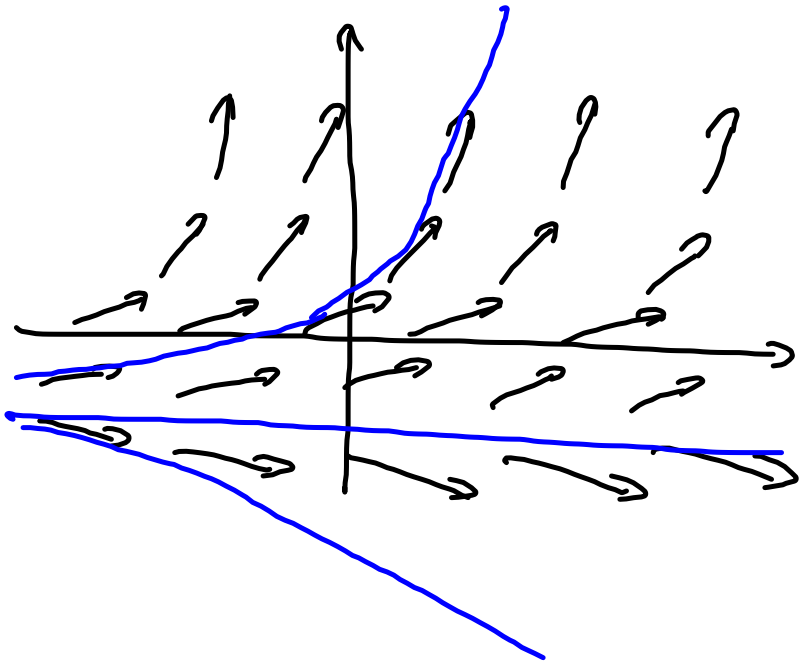
Bemerkung: Die Umkehrung der Teile 1) und 2) des Satzes gilt nur, wenn M ebe einfach zusammenhängende Menge ist:



M einfach zusammenhängend



hier ein Loch z



Die Feldlinien sind die Kurven, die in jeden Punkt P durch den Vektor $\vec{F}(P)$ tangiert werden.
TANGIERT WERDEN

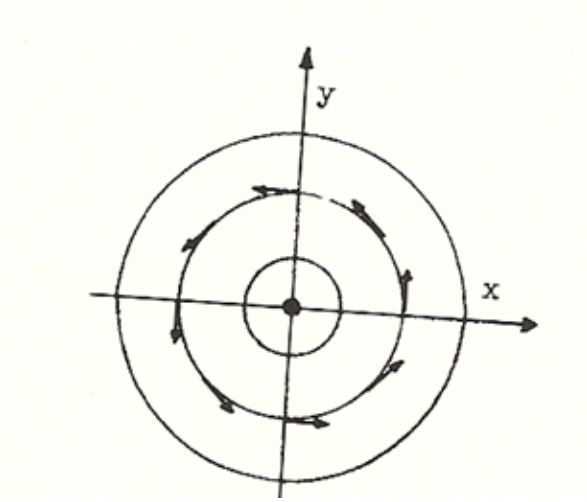
Feldlinien (Bahnkurven)

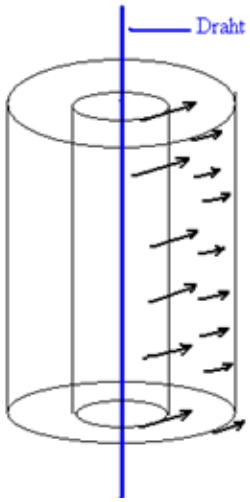
Beispiel 4: Magnetfeld welches durch einen stromdurchflossenen Draht erzeugt wird.

Das Magnetfeld eines (unendlich lang gedachten) stromdurchflossenen Drahtes längs der z-Achse ist außerhalb des Drahtes durch

$$\vec{H}(x,y,z) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$ gegeben (I = Stromstärke). Dieses Vektorfeld liefert in jeder Ebene senkrecht zur z-Achse das gleiche Bild:

Die Feldvektoren sind Tangentenvektoren an Kreise, die kreisförmigen Feldlinien lassen sich durch Eisenspäne sichtbar machen. Auf den Kreislinien (Zylindermantel) sind die magnetischen Kräfte gleich stark (Äquipotentialflächen), die Kraft nimmt ab, je weiter der senkrechte Abstand von $\vec{r}$ vom Draht ist.



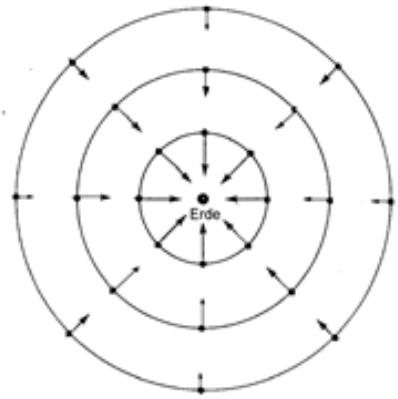


Definition:

Die Kurve $\vec{r}(t)$, für die gilt $\vec{F}(\vec{r}(t)) \parallel \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, heißt ***Bahnkuvre (oder Feldlinie oder Flusslinie)*** im Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$.

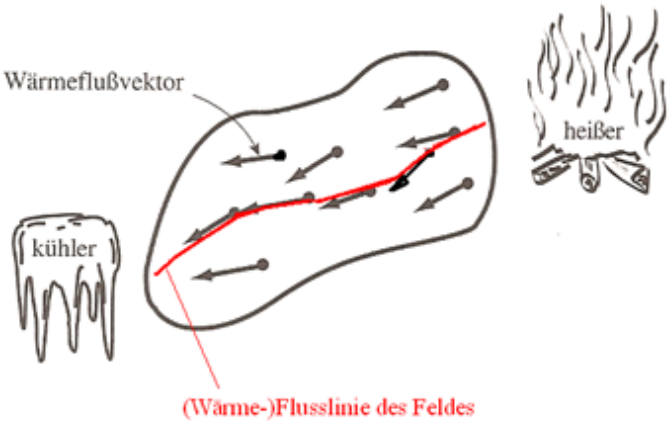
Beispiel 1:

Sei $\Omega(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ das Skalarfeld, was jedem Punkt P im Weltraum mit der Ortsvektor $\vec{r}$ (vom Erdmittelpunkt aus gesehen) das Reziproke seines Abstandes $|\vec{r}|$ vom Erdmittelpunkt zuordnet.



Die Äquipotentialflächen sind Kugeloberflächen von Kugeln mit dem Radius $|\vec{r}|=c$

Beispiel 1:
Wir betrachten einen Körper, der auf der einen Seite erhitzt, auf der anderen Seite gekühlt wird. Die Temperatur in jedem Punkt innerhalb des Körpers ist ein Skalarfeld T(x,y,z). Die Wärmeströmung lässt sich durch eine Schar von Pfeilen darstellen, die Richtung und Geschwindigkeit der Strömung anzeigen:



Ein Vektorfeld, welches Richtung und Geschwindigkeit des Wärmeflusses angibt.

Die Temperatur in jedem Punkt innerhalb des Körpers ist ein Skalarfeld T(x,y,z).

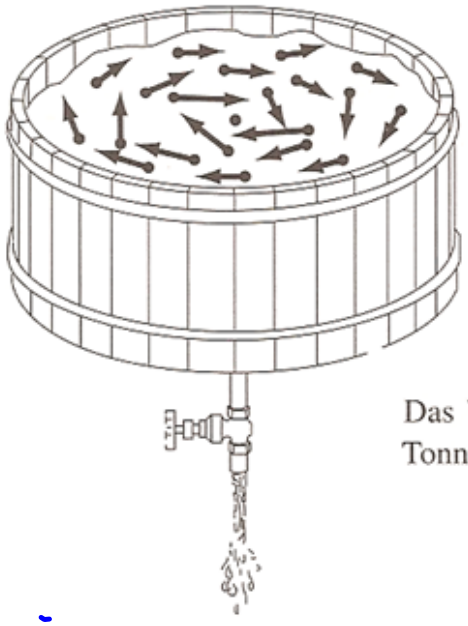
Es wird beschrieben durch:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \cdot grad(T(\vec{r}))$$, wobei die Konstante k > 0 die Leitfähigkeit darstellt.

Die Schar von Pfeilen bilden das Vektorfeld des Energie- bzw. Wärmeflusses.
Die Wärme strömt (wie zu erwarten) von warmen zu kalten Bereichen, da $-grad(T(\vec{r}))$ in Richtung abnehmender Temperatur weist.

Wie berechnet man die Feldlinien?

Beispiel 2:



Das Vektorfeld, das den zirkularen Fluß in einer Tonne beschreibt.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bestimmung von Bahnkurve:

1) $\bar{F}(\bar{r}(t)) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt}$

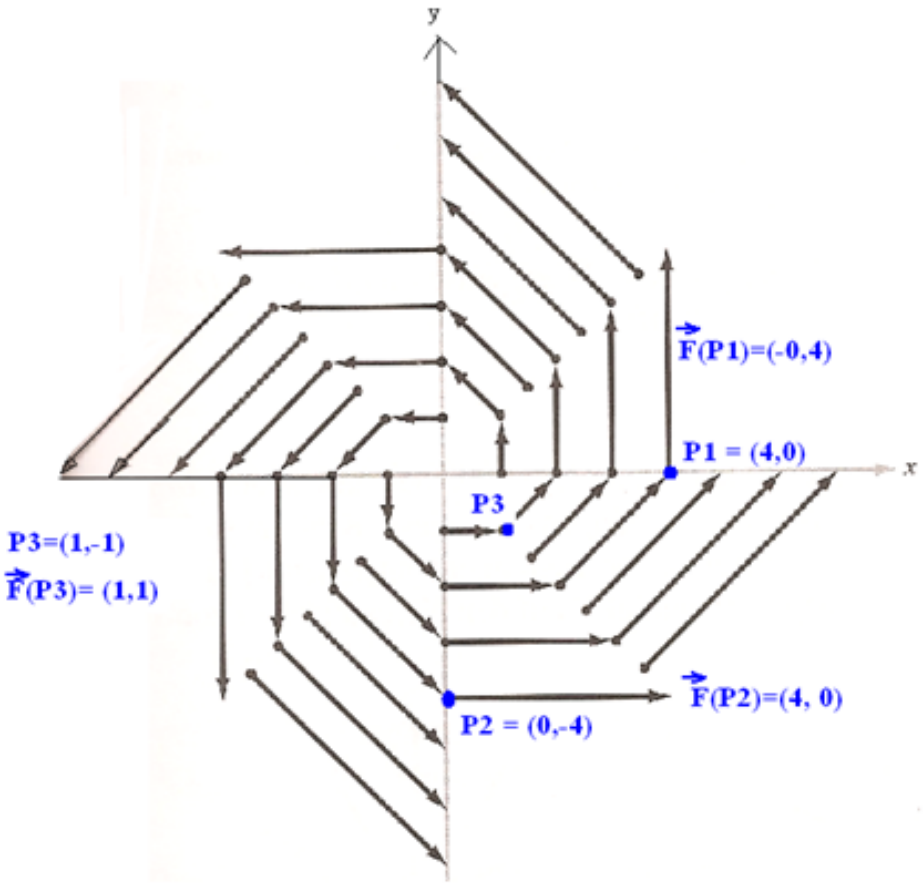
$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_1(x(t), y(t), z(t)) = \dot{x}(t) \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) = \dot{y}(t) \\ F_3(x(t), y(t), z(t)) = \dot{z}(t) \end{cases}$$

z.B.: $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$


y
x
F(P1)=(-0,4)
P1 = (4,0)
P3
P3=(1,-1)
F(P3)= (1,1)
F(P2)=(4, 0)
P2 = (0,-4)

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\bar{r}}(t)$$

$$\begin{cases} -y(t) = \dot{x}(t) \\ x(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

$$-y = \dot{y} = y''$$

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = x_0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j; \quad \operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_{1,2} = 1$$

$$y(t) = e^{(\operatorname{Re}\lambda_{1,2})t}\left(C_1 \cos((\operatorname{Im}\lambda_{1,2})t) + C_2 \sin((\operatorname{Im}\lambda_{1,2})t\right) =$$

$$= C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

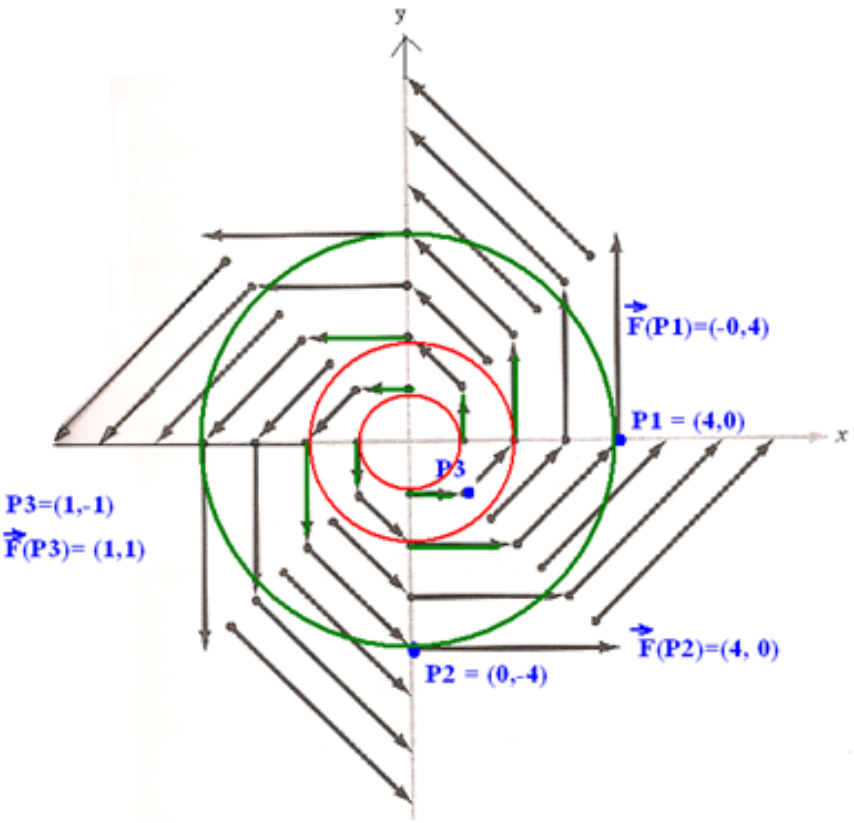
AB $\Rightarrow$

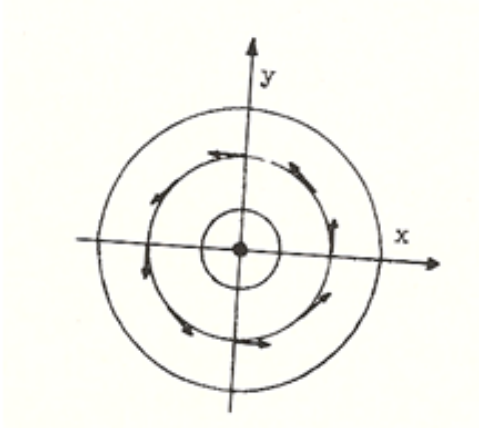
$$y(t) = y_0 \cos t + x_0 \sin t$$

Aus $\dot{x} = y$

$$\Rightarrow x = -y_0 \sin t + x_0 \cos t$$

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \sin t$$


y
x
F(P1)=(-0,4)
P1 = (4,0)
P3
P3=(1,-1)
F(P3)= (1,1)
F(P2)=(4, 0)
P2 = (0,-4)


y
x

;