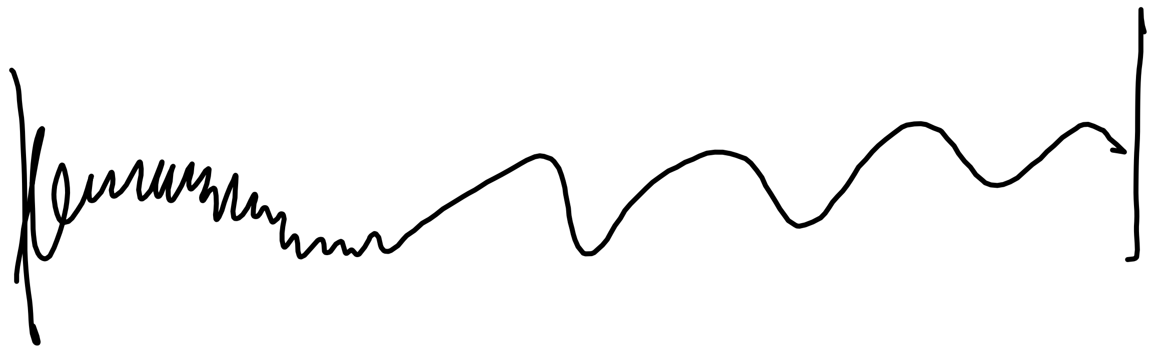
$$f = [\, f_0 \quad f_1 \quad \cdots\cdots \quad f_{N-1} \,]$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$\hat{f} = [\, u_0 \; u_1 \quad \cdots\cdots \quad u_{N-1} \,]$$



1D:

Gauß - Pyramide

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

Binomialkern

Separabel

1D - Signal:

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_{2^N} \right)^T$$

Signal zum Level k
hat 2^k+1 Wert

$\longrightarrow$

Restriktionsoperatoren

von Level k zu $(k-1)$

Multiplikation mit

$\left(2^{k-1}+1\right) \times \left(2^{k}+1\right)$ -

\- Matrix

$$R^k := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$R^1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Die Gaußpyramide

$$\{v^N, \ldots, v^0\}$$

$$v^N := u$$

$$v^{k-1} := R^k v^k, \quad k = N, \ldots, 1$$

Speicherplatzbedarf!

1D:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

2D:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$$

3D:

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots = \frac{1}{1 - 1/8} = \frac{8}{7}$$

Laplace - Pyramide 1D

Signal

$$u = (u_0, \ldots, u_{2^n})^T$$

- Interpolationsoperator

von Level k zu $(k+1)$

$$P^k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k \geq 1$$

$$P^0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P^k ist $(2^{k+1}+1) \times (2^k+1)$

Matrix

- Laplace - Pyramide

$$\{ w^N, \ldots\ldots, w^0 \}$$

$$w^k = v^k - P^{k-1} \cdot v^{k-1}, \quad k = N, \ldots, 1$$

$$w^0 = v^0$$

v^k - Gaußpyramide.

Das ursprüngliche Bild:

$$V^0 := W^0$$

$$V^k := W^k + P^{k-1} V^{k-1}$$

$$k = 1, \dots, N$$

$$U := V^N;$$

Bandpass,

Wavelet-Trafo

Bsp.: Signaldarstellung in einer anderen Basis:

$$f = (6, 4, 5, 1)^T$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^T$$

$b_1, \dots, b_4 \rightarrow$ orthonormale Basis von $\mathbb{R}^4$

$$a_1 = f^T b_1 = 8$$

$$a_2 = f^T b_2 = \langle f, b_2 \rangle = 2$$

$$a_3 = f^T b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cancel{+} + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$a_4 = f^T b_4 = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

a_1 : Skalierter mittlerer Grauwert

$|a_2|$: beschreibt Tieffrequenzanteil ohne Lokalisierung

$|a_3|$: Hochfrequenzanteil in der linken Signalhälfte

$|a_4|$: - - - - - - // — rechten — " —

Wavelet - Basis

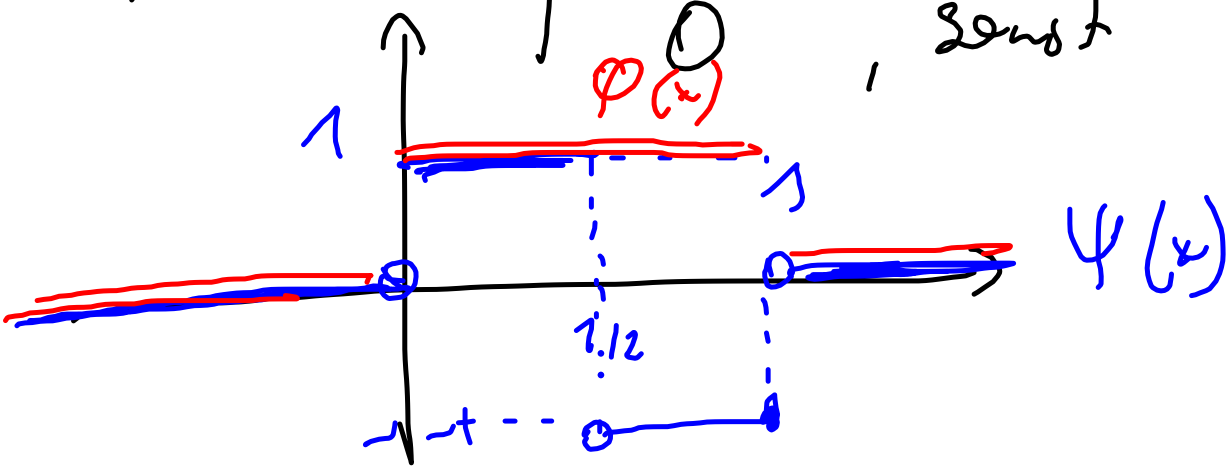
- Lokale Wellenartige Funktion (Mutter wavelet) wird skaliert und verschoben
- Zur Darstellung des mittleren GW's wird eine weitere Basisfunktion benötigt, deren MW nicht verschwindet (Skalierungsfunkt.)

Das kontinuierliche Haar-Wavelet!

(1810; Alfred Haar)

Mutterwavelet:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\psi_{j,k}(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \, \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

Breite: 2^j

Höhe: $\frac{1}{2^{j/2}}$

Beginn: $k \cdot 2^j$

Skalierungsfunktion:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi_{j,k}(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \varphi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

Fr.: Diskrete Wavelets

+ Farbräume