Mathematik III
HTW BI/M SS-2013
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Vorbereitung zu der Klausur

Allgemeine Hinweise:

Die Klausur findet am 5.9. um 9:00 Uhr im Raum 7105 statt (man soll aber den Raum noch mal überprüfen, Änderungen möglich, S. Aushang!) und dauert 120 min.

Die vorbereitende Fragestunde findet am 3.9. um 14:30 statt, Raum wird zusätzlich online bekanntgegeben!

Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis zu der Klausur mit! Die Abgabe der Klausurarbeit ist nur mit Ausweis möglich!

Sollten Sie den Studentenausweis nicht bringen können (liegt bei der HTW zur Austausch, ist verloren und wird gerade erneuert, ...), so bringen Sie bitte einen Lichtbildausweis mit (Personalausweis, Führerschein, ...).

Die Klausur wird auf Ihrem eigenen Papier geschrieben. Bitte sorgen Sie dafür, dass Sie genug Blätter mit dabei haben.

Die einzelne Blätter werden bei Abgabe der Klausur zusammengeheftet. Trotzdem versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer (auch das Aufgabenblatt, das auch als Deckblatt dient).

Zur Klasur zugelassene Hilfsmittel sind:

- Eigene Mitschriften, evtl. um eine oder andere Formel erweitert
- Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ohne Computer Algebra System (sollte Ihr TR programmierbar sein oder ein CAS haben, sprechen Sie mich bitte an, bevor Sie einen nichtprogrammierbaren TR für die Klausur ausleihen, mit dem Sie mangels Erfahrung nicht umgehen können! Je nach Modell (bzw. je nach Funktionalität) könnte Ihr TR evtl. doch zu der Klasur zugelassen werden!)

  Ein Handy/Smartphone/Tablet-PC wird als Taschenrechenr nicht zugelassen!
- Schreibutensilien

  Bitte verwenden Sie keine rote Stifte!

  Schreiben Sie bitte nicht mit einem Bleistift!

Klausur-Hinweise:

- Begründen Sie alle Aussagen bzw. machen Sie Lösungswege deutlich!
- Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Sollten Sie für die Lösung einer Aufgabe mehr als ein Blatt brauchen, nummerieren Sie bitte diese Blätter und schreiben auf jedem Blatt die Nummer der entspr. Aufgabe.
- Versehen Sie bitte jedes Blatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie bitte keine rote Stifte und Bleistifte, um Ihre Lösungen aufzuschreiben.

Die Klausur wird mehr Aufgaben beinhalten, als Sie lösen müssen!

Achten sie bitte auf die Punktezahlen hinter jeder Aufgabe!

Sollten Sie mehr als die benötigte Anzahl der Aufgaben (wird auf dem Klausurdeckblatt bekanntgegeben, angenommen N) gelöst haben, wird die Note von den N Aufgaben mit den meisten erreichten Punkten bestimmt!

Klausur-Inhalt:

Während der Vorlesung haben wir folgenden Klausurrelevante Themen besprochen:

- Matrizen und Vektoren; Operationen mit Matrizen und Vektoren, Determinanten, inverse Matrix (Wiederholung)
- Lösung der linearen Gleichungen (Gleichungssysteme):

  exakte Methoden (Gauß-Algorithmus, Cramer'sche Regel, Lösungsbestimmung mit inverser Systemmatrix);

  approximative Methoden (Iterationsverfahren: Jacobi, Gauß-Seidel)
- Lösung der nichtlinearen Gleichungen:

  Bisektionasverfahren;

  Fixpunktiteration;

  Newton-Tangentenverfahren
- Interpolation und Approximation:

  Interpolationsaufgabe; das lineare Gleichungssystem von Van Der Monde;

Interpolationspolynome von Lagrange;

Interpolation nach Newton (Dividierte Differenzen);

Kombi-Aufgaben (Tabelle wird erweitert, zwei ähnliche Tabellen, zu einer ist das Interpolationspolynom bekannt, etc.)

- Lineare Regression:

  Methode der kleinsten Quadraten, Normalgleichung;

  Regressionsgerade;

  Regressionsparabel

- Numerische Quadratur:

  Ober- und Untersummen, Mittelpunktregel;

  Trapezregel;

  Simpson-Regel und Newton 3/8-Regel;

  Fehlerabschätzungen;

  Zusammengesetzte Regeln

Zusätzlich zu den Aufgaben zu Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssysteme, die wir schon während der letzen Stunde besprochen haben, sind Aufgaben von folgenden Typen möglich (aber auch andere, weitere hier nicht genannte Aufgaben zu oben genannten Themen!):

Achtung: nicht alle oben aufgelistete Themen sind hier vollständig abgedeckt! Berabeiten Sie die Übeungsblätter und rechnen Sie die Beispiele aus der Vorlesung durch!

Aufgabe 1

Approximieren Sie $\cos(x)$ *auf* $[-\pi/2, \pi/2]$ *an drei Stützstellen und schätzen Sie den Fehler ab.*

Skizzieren Sie mittels Matlab das Interpolationspolynom und die Cos-Funktion in ein Koordinatensystem.

Lösung: Wir haben bewiesen, dass das Interpolationspolynom eindeutig bestimmt ist, d.h. unabhangig vom Verfahren. An jedem Messpunkt soll das gesuchte Interpolationspolynom den gemessenen Wert erreichen. Wir haben drei Stutzstellen, d.h. wir können nur ein Interpolytionspolynom der Ordnung 2 erhalten.

Seien die drei Stützstellen gleichmäßig verteilt, d.h. wir approximieren $\cos x$ in $-\pi/2, 0, \pi/2$. Cosinuns nimmt an den Stellen die Werte $0, 1$ und 0 an.

- *Van der Mond'sche Matrix*:

  Sei das gesuchte Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$. Dann gilt:

  $$\begin{aligned} a(-\pi/2)^2 + b(-\pi/2) + c = 0 \\ a(0)^2 + b(0) + c = 1 \\ a(\pi/2)^2 + b(\pi/2) + c = 0 \end{aligned}$$

  mit Unbekannten a, b, c. Das System wird mit den Mitteln aus Mathematik 1 gelöst.

- *Interpolation nach Lagrange*

  $x_0 = -\pi/2, x_1 = 0, x_2 = \pi/2$
  $y_0 = 0, y_1 = 2, y_2 = 0$

  $$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(-\pi/2-0)(-\pi/2-\pi/2)} = \frac{2}{\pi^2}x^2 - \pi x$$

  $$L_1(x) = \frac{(x+\pi/2)(x-\pi/2)}{(0+\pi/2)(0-\pi/2)} = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1$$

  $$L_2(x) = \frac{(x+\pi/2)(x-0)}{(\pi/2+\pi/2)(\pi/2-0)} = \frac{2}{\pi^2}x^2 + \pi x$$

  $$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) = 2\left(-\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1\right)$$

- Interpolation nach Newton

  Analog zu Aufgabe 3.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die vier Punkte $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$ *mit verschiedenen Methoden (Gleichungssystem mit Van der Monde-Matrix, Lagrange, Newton).*

Lösung: Analog zu der Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Vervollständigen Sie das folgende Differenzenschema für ein Newtonisches Interpolationspolynom:

x	y			
*	-2			
		2		
0	0		-1	
		0		*
1	*		2	
		*		
2	4			

Ergänzen Sie das Schema und geben Sie das Newtonsche Interpolationspolynom an.

Lösung:

x	y			
A	-2			
		2		
0	0		-1	
		0		D
1	B		2	
		C		
2	4			

Man erhält die unbekannten Konstanten aus, z.B.:

$\frac{C-0}{2-0} = 2 \Rightarrow C = 4$

$\frac{4-B}{2-1} = 4 \Rightarrow B = 0$

$\frac{0-(-2)}{0-A} = 2 \Rightarrow A = -1$

$\frac{2-(-1)}{2-A} = D \Rightarrow D = 1$

Das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom ist somit
$p(x) = -2 + 2(x + 1) - (x + 1)x + (x + 1)x(x - 1) = x^3 - x^2$

Aufgabe 4

Zur Interpolation einer Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *werde eine äquidistante Zerlegung des Intervalls verwendet, d.h. bei gegebenem* $0 < N \in \mathbb{N}$ *wählt man* $x_k := (2k)/N$ *für* $k = 0, ..., N$. *Zeigen Sie, daß in diesem Fall die in der Vorlesung eingeführte Funktion* $\omega(x) := \prod_{k=0}^{N}(x - x_k)$ *die folgende Abschätzung erfüllt:*

$$|\omega(x)| \leq (N+1)! \left(\frac{2}{N}\right)^{N+1} \qquad \forall x \in [0,2].$$

Lösung:

Sei I das Intervall, $|I| = 2$. Seien $x_0, ..., x_N$ mit $x_k = 2k/N$ die Zerlegungspunkte.

$x_k = \frac{2k}{N}, \quad k = 0, .., N$

$\omega(x) = \Pi_{k=0}^{N}(x - x_k)$ (s.Vorlesung)

Dann $\forall x \in I$ gilt: $\exists i_0 \in \{0, ..., N-1\}$ mit $x \in [x_{i_0}, x_{i_{0+1}}]$.

Dann:

$$|\omega(x)| = \Pi_{k=0}^{N}|x - x_k| =$$

$$= \Pi_{k=0}^{i_0}|x - x_k| \; \Pi_{k=i_{0+1}}^{N}|x - x_k| \leq$$

$$\leq \Pi_{k=0}^{i_0}\frac{2}{N}|(i_0+1) - k| \; \Pi_{k=i_{0+1}}^{N}\frac{2}{N}|i_0 - k| =$$

$$= \left(\frac{2}{N}\right)^{N+1} (i_0+1)!(N-i_0)!$$

Für alle $i_0 \in 0, ..., N-1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} N_0 + 1 \\ i_0 + 1 \end{pmatrix} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (N_0+1)! \geq (i_0+1)!(N-i_0)!$$

$$\Rightarrow \textit{ Behauptung.}$$

Überlegen Sie, wie ändert sich die Formel, wenn Intervall andere Länge hat? Wie sieht die Verallgemeinerung aus?

Aufgabe 5 *Die Funktion* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

soll auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ durch ein Polynom interpoliert werden. Dazu soll das Intervall I durch ein äquidistantes Gitter unterteilt werden, d.h. die Stützstellen der Interploation sind

$$x_k = -1 + k\frac{2}{N}, \qquad k = 0, ..., N.$$

Wie muß man N wählen, so daß der Interpolationsfehler auf jeden Fall kleiner als $\epsilon = 10^{-4}$ wird? Benutzen Sie hierbei die aus der Aufgabe 4 bekkante Abschätzung.

Lösung:

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist zu approximieren auf $[-1, 1]$. Intervalllänge von $[-1, 1]$ ist 2.

In der Vorlesung ist folgende Fehlerabschätzung eingefuhrt:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x)$$

Die $n-$te Ableitung von $f(x)$ ist

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2} \qquad \forall n \geq 0.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 0 \qquad |f^{(n)}| \leq \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \qquad auf\ [-1, 1]$$

$$\Rightarrow |f(x) - p(x)| \leq \frac{e + \frac{1}{e}}{2} |\omega(x)| \frac{1}{(N+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{N}\right)^{(N+1)}.$$

Bestimme N so, daß die rechte Seite $\leq 10^{-4}$ ist (immer AUFrunden, keinerfalls abrunden!):

$$N = 7.$$

Aufgabe 6

Durch eine ungenaue Übertragung der Funktionswerte f_k hat sich in der folgenden Tabelle zur Bestimmung eines ***quadratischen*** *Polynoms ein Fehler eingeschlichen.*

x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	10	3	0	2	6

Es ist bekannt, daß ***genau ein*** *Funktionswert f_k falsch übermittelt wurde. Formulieren Sie zunächst eine allgemeine und eine speziell auf diesen*

Fall ausgerichtete Strategie, wie man den fehlerhaften Wert f_k auffinden kann. Benutzen Sie sie dann, um den fehlerhaften Wert herauszufinden und berichtigen Sie den entsprechenden Eintrag in der Tabelle.

Plotten Sie in Matlab die (richtige) Interpolationsparabel und markieren Sie alle gegebene Punkte einschl. den falschen. Markieren Sie den berichtigten Punkt. Beschriften Sie Ihre Grafik.

Lösung:
Original-Strategie:

1. jeweils eine Stützstelle weglassen
2. Neville-Algorithmus verwenden
   - wenn $\phi_{33} \neq 0 \Rightarrow$ quadratische Interpolation unmöglich, neuer Versuch
   - wenn $\phi_{33} = 0 \Rightarrow$ die weggelasene Stelle war die 'falsche', d.h. die gesuchte

Vorteile:

- max. 5 Versuche
- immer anwendbar

Nachteile:

- aufwendig (Neville!)
- Polynom-Aufstellung zur Korrektur ebenfalls aufwendig

Alternative (in diesem Fall):
$x = 0 \to f(x) = 0$

1. Wenn dieser eintrag stimmt, hat Polynom die einfache Form $p(x) = a_1 x^2 + a_2$
   - wähle $0 \neq x_i \neq x_j \neq 0$ als Stutzwerte
     Bestimme p durch Lösen von
     $$\begin{pmatrix} x_i^2 & x_i \\ x_j^2 & x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \end{pmatrix}$$
   - Vergleiche $p(x_k)$ an den beiden verbliebenen Stellen mit f_k
     Wenn beide falsch $\to$ neue Wahl (x_i, x_j)
     sonst: Stelle, an der $p(x_k) \neq f_k$ ist die gesuchte.
2. $x = 0$ ist die gesuchte Stelle

Vorteile:

- Rechnungen einfacher (2×2)
- Polynom direkt erhalten $\rightarrow$ Korrektur einfach

Nachteile:

- geht nur bei solchen Tabellen mit $x_i = 0,\ f_i = 0$
- max. $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$ Versuche

Versuch:
$\{-2, -1\}$ als Stützstellen:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$a_y = 2,\ a_2 = -1$

$$p(x) = 2x^2 - x$$

$p(1) = 1 \ \leftarrow$ falsch
$p(2) = 6 \ \leftarrow$ richtig
D.h. falsche Übermittlung an der Stelle 1

Richtige Tabelle:

-2	-1	0	1	2
10	3	0	$\boxed{1}$	6

Aufgabe 7

Polynominterpolation der Daten

x_i	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\tan(x_i)$	*0*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	*1*

liefert ein Näherungspolynom p für die Tangensfunktion.

a) *Mit welchem Fehler* $R(x) = |\tan(x) - p(x)|$ *ist an der Stelle* $x = 0.4$ *höhstens zu rechnen?*

b) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p und berechnen Sie den wirklichen Fehler* $R(0.4) = |\tan(0.4) - p(0.4)|$ *mit dem (Taschen)rechner.*

Lösung:

a) Nach der Formel für das Interpolationsrestglied ist

$$R(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)| \quad \textit{mit} \quad M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{n+1}(x)|.$$

Hier ist $f^{n+1}(x) = f'''(x)$. Man erhält:

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) = 2 \tan^3 x + 2 \tan x$

$f'''(x) = 6 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + 2(1 + \tan^2 x) = 6 \tan^4 x + 8 \tan^2 x + 2$

$f''''(x) = 24\tan^3 x(1+\tan^2 x) + 16\tan x(1+\tan^2 x) \geq 0 \; in \; [0, \pi/4]$.
Weil f''' monoton wächst, ist $M_{n+1} = |f'''(\pi/4)| = 16$. Somit ist

$$R(x) = |\tan x - p(x)| \leq \frac{16}{6}|x(x-\pi/6)(x-\pi/4)|.$$

Nun hat man für $x = 0.4$

$$R(0.4) \leq \frac{8}{3}|0.4(0.4-\pi/6)(0.4-\pi/4)| \leq 0.12702$$

b) Für das Interpolationspolynom erhält man mit Newton

x_k	y_k		
0	0		
		$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$	
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3$		$\frac{24(2-\sqrt{3})}{\pi^2}$
		$\frac{12-4\sqrt{3}}{\pi}$	
$\pi/4$	1		

Dann ist

$$p(x) = \frac{24}{\pi^2}(2-\sqrt{3})x^2 + \frac{2}{\pi}(3\sqrt{3}-4)x.$$

Für den wahren Fehler $R(0.4)$ erhält man (Taschenrechner, CAS, etc.)

$$R(0.4) = |\tan(0.4) - P(0.4)| = 0.0139.$$

Das bestätigt also, daß die Restgliedabschätzung einigermaßen grob ist.

Aufgabe 8

Eine Lösung der Gleichung $x = \tan x$ im Intervall $(0; 2\pi)$ kann ermittelt werden, wenn man die Gleichung $x = \arctan x + \pi$ lost. Die Lösung ist im Intervall $[4; 5]$ zu erwarten.

Untersuchen Sie die Banach-Iteration für diese Gleichung, d.h.: Zeigen Sie, daß $\phi(x) = \pi + \arctan x$ das Intervall $[4; 5]$ in sich abbildet und daß diese Abbildung eine Kontraktion ist.

Schätzen Sie damit ab, wieviele Folgenglieder zu berechnen sind, damit

$$|x_n - x^*| < 10^{-5}.$$

Lösung:
Überprüfung der Vorausssetzungen des Fixpunktsatzes auf $[4, 5]$:

- ϕ ist selbstabblidend, denn

  – ϕ ist monoton wachsend, d.h. $\phi(4) \leq \phi(x) \leq \phi(5)$
  – $\phi(4) = \pi + \arctan 4 \approx 4.467 > 4$
  – $\phi(5) < \pi + \pi/2 \approx 4.712 < 5$

- ϕ ist kontrahierend auf $[4, 5]$, denn
$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
ist positiv und monoton fallend auf $[4, 5]$, d.h.
$$\max_{x\in[4,5]} |\phi'(x)| = \phi'(4) = 1/17 < 1.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat ϕ in $[4, 5]$ genau einen Fixpunkt x^*.

Die a priori Abschätzung der Iteration auf $[4, 5]$ mit $x_0 = 4$ bei der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-5}$ lautet:
$$x_0 = 4$$
$$x_1 = 4.468$$
$$L = 1/17 < 0.06$$
$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{0.06^n}{0.94} \cdot 0.468 \leq 10^{-5}.$$
Das gibt
$$0.06^n \leq \frac{0.94}{0.468} \cdot 10^{-5} = 2.001 \cdot 10^{-5}$$
$$n \geq \frac{\ln(2.001 \cdot 10^{-5})}{\ln 0.06} = 3.846.$$
Es genügen also 4 Iterationen.

Aufgabe 9

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$.

a) *Zeigen Sie, daß es im Intervall* $[0; 1]$ *genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$ *gibt indem Sie*

   (i) *überprüfen, daß* f *das Intervall* $[0; 1]$ *in sich selbst abbildet und*
   (ii) *nachweisen, das* f *kontrahierend ist.*

b) *Wieviele Iterationsschritte sind, ausgehend vom Startwert* $x_0 = 0$, *laut a-priori-Abschätzung höhstens nötig, um den Fispunkt mit einer Genauigkeit von* $\epsilon = 10^{-2}$ *zu approximieren?*

c) *Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung der Funktion* $g(x) = x - f(x)$ *auf und berechnen Sie, beginnend mit dem Startwert* $x_0 = 1/2$, *die erste drei Folgenglieder.*

Lösung:
Überprüfung der Vorausssetzungen des Fixpunktsatzes auf $[1, 0]$:

- f ist selbstabblidend, denn
  - f ist monoton wachsend, d.h. $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$
  - $f(0) = 1/2 > 0$
  - $f(1) = 1/2\sqrt{e} < 1/2\sqrt{3} < 1$
- f ist kontrahierend auf $[0, 1]$, denn

$$f'(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$$

  ist positiv und monoton wachsend auf $[0, 1]$, d.h.

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = f'(1) \leq L := 0.42 < 1.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat f auf $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt x^*.

Die a priori Abschätzung der Iteration auf $[0, 1]$ mit $x_0 = 0$ bei der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-2}$ lautet:

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 0.5$$
$$L = 0.42$$
$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{0.42^n}{0.58} \cdot 0.5 \leq 10^{-2}.$$

Das gibt

$$0.42^n \leq \frac{0.58}{0.5} \cdot 10^{-2} = 0.0116$$
$$n \geq \frac{\ln(0.0116}{\ln 0.42} = 5.137.$$

Es genügen also 6 Iterationen.

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

unter der Voraussetzung, daß die Durchführbarkeitsbedingung

$$\left|\frac{f(x_n) \cdot f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}\right| \leq 1$$

fur alle x_n inkl. Startwert x_0 erfüllt ist.

Aufgabe 10

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x$.

a) *Zeigen Sie, daß es im Intervall* $[\pi/4; \pi/2]$ *genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$ *gibt indem Sie*

   (i) *überprüfen, daß* f *das Intervall* $[0; 1]$ *in sich selbst abbildet und*

   (ii) *nachweisen, das* f *kontrahirend ist.*

b) *Wieviele Iterationsschritte sind, ausgehend vom Startwert* $x_0 = 0$, *laut a-priori-Abschätzung höhstens nötig, um den Fispunkt mit einer Genauigkeit von* $\epsilon = 10^{-6}$ *zu approximieren?*

c) *Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung der Funktion* $g(x) = x - f(x)$ *auf und berechnen Sie, beginnend mit dem Startwert* $x_0 = \pi/4$, *die erste drei Folgenglieder.*

Lösung:

Analog (wird in der übungsstunde besprochen)

Aufgabe 11

Sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} - x$ *gegeben.*

Untersuche, ob diese Funktion auf dem Intervall $[2, 3]$ *Nullstellen hat. Falls ja, wieviel? Beweis!*

Sollte es nur eine Nullstelle auf dem Intervall geben, wieviele Schritte der Banach-Iteration sind nötig (falls das Verfahren anwendbar ist: überprüfe die Voraussetzungen!), um diese mit der Genauigkeit 10^{-2} *zu bestimmen?*

Führe die erste 5 *Schritte des Bisektionsverfahrens aus.*

Lösung:

Schreiben wir die Gleichung um: $x = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$. Nun haben wir eine Fixpunktgleichung. Es ist

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}}, \quad f''(x) = \frac{1}{8}x^{-3/2}(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}},$$

woraus man entnimmt:

Im Intervall $[2, 3]$ ist

a) $f'(x) > 0$, also f monoton wachsend. Somit ist

$$f(I) = [f(2),\ f(3)] \subset [2.05,\ 2.83] \subset I$$

b) $f''(x) > 0$, also f' monoton wachsend. Wegen $f'(x) > 0$ in I ist somit

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| = \max_{x \in I} |f'(x)| = f'(3) < 0.816 < 1.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes mit der (Lipschitz-)Kontraktionskonstante $L = 0.816$ erfüllt.

Für $\epsilon = 10^{-2}$ und $x_0 = 2,\ x_1 = f(x_0) < 2.057$ erhalt man aus der a priori Abschätzung

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

für n die Bedingung

$$n > 16.884.$$

Es müssen also wenigstens 17 Glieder der Iterationsfolge berechnent werden. (Mit $L = 0.85$ erhält man $n \geq 23$.)

Zur Bisektion: die Funktion g ist monoton fallend auf I und $g(2) = f(2) - 2 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}} - 2 > 0.0566$ und $g(3) < -0.1738$, hat also an den Intervallränder unterschiedliche Vorzeichen $\Rightarrow$ Bisektionsverfahren funktioniert. Berechne also $g(2.5)$ und vergleich die Vorzeichen von $g(2),\ g(2.5),\ g(3)$. W■´hle das Intervall mit unterschidlichen Vorzeichen aus und wiederhole den Vorgang 5-mal.

Aufgabe 12

Die Gleichung

$$1 + \xi^2 = e^{2\xi - 2}$$

soll gelöst werden. Geben Sie eine Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ *an, die unabhängig vom gewählten Startpunkt* x_0 *gegen die Lösung der Gleichung konvergiert.*

Wählen Sie als Startwert $x_0 = 0$ *und geben Sie an, wieviele Iterationen Sie höhstens benötigen, um die gesuchte Lösung* ξ *auf* 3 *Nachkommastellen genau zu berechnen.*

Lösung:

$$1 + \xi^2 = e^{2\xi - 2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) +^{=} x$$

Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit $\Phi(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + 1 \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, daß $\Phi(x)$ stetig als Summe und Superposition auf ganzem $\mathbb{R}$ erklärter Funktionen ist.

a) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (selbstabbildend; "durch scharfes Hinsehen", "offensichtlich", "leicht zu sehen")

b) $\Phi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}$.

Wegen $0 \leq (x-1)^2 = 1 + x^2 - 2x$ gilt:

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h. Φ ist einbe Kontraktion mit der Lipschitz-Kontraktionskonstante $L = 1/2$.

Die Konvergenz der Iteration folgt aus dem Fixpunktsatz von Banach.

Es gilt die a priori Abschätzung

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

Mit $x_0 = 0$, $x_1 = \Phi(x_0) = \Phi(0) = 1 \to |x_1 - x_0| = 1$ und $L = 1/2$ folgt:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 10^{-3}.$$

Man braucht also 11 Iterationen durchzuführen.

Aufgabe 13

Sei f auf dem Intervall $[a;b]$ eine stetige differenzierbare Funktion mit der stetigen auf $[a;b]$ Ableitung ($f \in C^1[a;b]$). Weiter besitze f die Eigenschaft

$$\min_{x \in [a;b]} |f'(x)| > 1.$$

a) Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels, das eine solche Funktion einen Fixpunkt $x_* \in [a;b]$ besitzen kann.

b) Zeigen Sie, daß bei Funktionen mit der obigen Eigenschaft die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert x_0, der kein Fixpunkt ist, divergiert.

Lösung:

a) Beispiel: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$.

$|f'(x)| \equiv 2, \quad f(1/3) = 1/3.$

b) $x^* = f(x^*)$, $x_0 \neq x^*$

$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, ...$

- Wenn (x_n) konvergiert, dann gegen einene Fixpunkt von f, denn, da f stetig,

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n.$$

- Sei $Q := \min_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 1$. Eine stetig f mit dieser eigenschaft kann keine zwei verschiedenen Fixpunkte haben:
sei $f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2,\ x_i \in [a, b]$; dann

$$|x_1-x_2| = |f(x_1)-f(x_2)| \overset{MWS}{=} |f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2| \overset{Q=\min f')}{\geq} Q\cdot|x_1-x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

- Nun untersuche $|x^* - x_{n+1}|$. $\forall n \geq 1$ gilt:

$$|x^*-x_{n+1}| = |f(x^*)-f(x_n)|/geqQ|x^*-x_n| \geq ... \geq Q^{n+1}|x^*-x_0| \to \infty,\ \ n \to \infty,$$

weil $Q > 1$ und $|x^* - x_0| > 0$ nach Voraussetzung.

D.h. keine Konvergenzgegen den eindeutigen Fixpunkt, und, wegen der ersten Überlegung, keine Konvergenz überhaupt.

Aufgabe 14

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel und der Trapez-Regel

$$S(f) = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an, indem Sie die Integrale exakt berechen. Vergleichen Sie jeweils den exakten Fehler mit dem a priori abgeschätzten Fehlerwert für das Trapez-Verfahren.

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^3 x - \cos 2x)dx,$$

$$I_2 = \int_2^3 \frac{x^3 - x}{2x^4 - 4x^2}dx.$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.

Aufgabe 15

Approximieren Sie unter Verwendung der Simpson-Regel

$$S(f) = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

die folgende Integrale und geben Sie den auftretenden Quadraturfehler an:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + 1)dx,$$

$$I_2 = \int_{-a}^{a} xe^{x^2} dx, \quad (a > 0).$$

Erläutern Sie kurz das jeweilige Resultat.

Lösung:

a)

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{10}{3}$$

$$S_1 = \frac{1}{3} f(-1) + 4f(0) + f(1) = \frac{10}{3} = I_1$$

Klar, da nach Konstruktion der Simpson-Regel Polynome vom Grad ≤ 3 exakt integriert werden.

b) Integrationsbereich symmetrisch um 0, Integrand xe^{x^2} punktsymmetrisch zu 0

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-a}^{a} xe^{x^2} dx = 0 \ \ \forall a > 0.$$

$$S_2 = \frac{2a}{6}(f(-a) + 4f(0) + f(a)) =$$

$$S = \frac{2a}{6}(-f(a) + 4f(0) + f(a)) = \frac{4a}{3} f(0) = 0$$

Daß $S_2 = I_2$ liegt an den Symmetrien und f(0)=0.

Aufgabe 16

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Leiten Sie die Simpson-Regel auf der folgende Art und Weise her:

Zu bestimmen sind Gewichte $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ derart, daß die Quadraturformel

$$S(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b)$$

das Integral $\int_a^b P(x)dx$ für alle Polynome P zweites Grades exakt berechnet.

Lösung:

Simpson-Regel:

$$S(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b) \approx \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (b-a)\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}$$

mit $t = \frac{x-a}{b-a}$ (also es genugt, das Intervall $[0,1]$ zu betrachten).

Es soll gelten:

$$S(t^k) = \int_0^1 t^k \mathrm{dt} = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem ist zu losen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega_0} \\ \tilde{\omega_1} \\ \tilde{\omega_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{\omega_i} = \frac{\omega_i}{b-a}$, $i = 0, 1, 2$. Gauß-Algorithmus fuhrt auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/12 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \ \tilde{\omega_0} = 1/6, \ \tilde{\omega_1} = 2/3, \ \tilde{\omega_2} = 1/6$$

$$\Rightarrow \ \omega_0 = \frac{b-a}{6}, \ \omega_1 = \frac{4}{6}()b-a, \ \omega_2 = \frac{b-a}{6},$$

oder, zusammengefasst:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Aufgabe 17

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^2([a,b])$ (f ist eine zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a,b]$, d.h. auf $[a,b]$ existieren stetige f' und f'').

Leiten Sie für die Trapezregel

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

mit Hilfe von Taylor-Formel für f an der Stelle $x \in [a,b]$ die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(x)) \right| \leq \frac{1}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| (b-a)^3$$

ab.

Lösung:

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + 1/2 f''(\xi_a)(a-x)^2$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + 1/2 f''(\xi_b)(b-x)^2$$

$$\xi_a = \xi_a(x) \in [a,x], \quad \xi_b = \xi_b(x) \in [x,b]$$

$$\to f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) - 1/4(f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)$$

Integriere von a bis b:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) =$$

$$= -\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\mathrm{dx} - \frac{1}{4}\left(\int_a^b (f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)\mathrm{dx}\right).$$

Das 1. Integral: partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\mathrm{dx} = \left[f(x)\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\right]_a^b + \int_a^b f(x)\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) + \int_a^b f(x)\mathrm{dx}.$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{dx} - \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\left|\int_a^b (f''(\xi_a)(a-x)^2 + f''(\xi_b)(b-x)^2)\mathrm{dx}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{8}\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)| \int_a^b ((a-x)^2) + (b-x)^2)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{8}\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)| \left[-\frac{1}{3}(a-x)^3 - \frac{1}{3}(b-x)^3\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3 \sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|.$$

Aufgabe 18

Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu folgender Wertetabelle. Geben Sie eine Darstellung der Form $p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i$.

x_k	-1	0	2	3
f_k	12	3	15	12
f'_k				0

Lösung:

i	x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	
0	-1	12				
1	0	3	-9			
2	2	15	6	5		
3	3	12	-3	-3	-2	
4	3	12	$0/1!$	3	2	1

Zusammensetzen:

$$H(x) = 12-9(x+1)+5x(x+1)-2x(x+1)(x-2)+1x(x+1)(x-2)(x-3) =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x + 3.$$

Check:

$$H'(x) = 6 + 16x - 18x^2 + 4x^3,$$
$$H'(3) = 6 + 48 - 162 + 108 = 0.$$

Aufgabe 19 *Bestimmen Sie das zu der folgenden Wertetabelle gehörende interpolierende Polynom in der Form* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$*:*

x_k	1	3	4
$f(x_k)$	-2	1	0
$f'(x_k)$		0	
$f''(x_k)$		-4	

Lösung:

i	x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	
0	-1	-2				
1	0	1	3			
2	0	1	0	-3		
3	0	1	0	2	5	
4	1	0	-1	-1	-3	-4

$$h(x) = -2 + 3(x+1) - 3x(x+1) + 5x^2(x+1) - 4x^3(x+1) =$$

$$= 1 + 2x^2 + x^3 - 4x^4$$

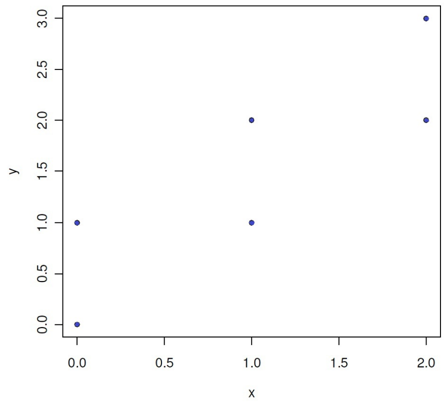
Aufgabe 20

Berechnen Sie ***ohne Taschenrechner*** *die Regressionsgerade* $f_z(x) = a + bx$ *nach Methode der kleinsten Quadrate für die folgenden Beobachtungswerte* (x_i, y_i), $i = 1, ..., 6$*:*

$$(0;0), (0;1), (1;1), (1;2), (2;2), (2;3).$$

Zeichnen Sie zunächst die Messdatenpunkte in ein Koordinatensystem ein und stellen Sie eine Hypothese darüber auf, welche Gerade die beste sein kann.

Lösung:
Man zeichne die Messdaten in ein Koordinatensystem:



Es ist leicht zu erkennen, daß eine Gerade $f(x) = b{\cdot}x{+}a$ mit vremutlich $b = 1$ und $a = 1/2$ passende Regressioinsfunktion sein kann.

Berechnen wir nun die am besten passende Gerade:

Dazu ist die Normalengleichungssystem $G^T G z = G^t y$ mit $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu lösen. Um G zu bestimmen. machen wir folgendes:

$$y \approx a + b \times x = (1 \ x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, daß die Messdatenpaar die Beziehung erfüllen:

$$y \approx Gz \quad mit \quad z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und G folgende Gestalt hat:

$$G = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \text{x} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nun wird das Normalengleichungssystem gelost:

$$G^T G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix},$$

$$G^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Glyichungssystems:

$$G^T G z = G^T y, \qquad z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ergibt

$$a = \frac{1}{2 = 0.5} \qquad \textit{und} \qquad b = 1.$$

Somit ist die beste Geradde (die Regressionsgerade), wie vermutet, $f(x) = x + 0.5$.

Aufgabe 21 *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade (Regressionsgerade) durch die Punkte $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 3.5)$, $(4, 5)$ *und* $(6, 4)$.

Lösung: Analog zu Aufgabe 3

Aufgabe 22

Der Zusammenhang zwischen dem Alter von 6 Gebrauchtwagen eines bestimmten Typs und den zugehörigen Preisen soll mittels geeigneter Regressionsfunktion dargestellt werden.

Alter in Jahren	*1*	*2*	*4*	*5*	*8*	*16*
Preis in 1000 Euro	*12*	*9*	*8*	*4*	*2*	*1*

a) *Skizzieren Sie die Punktwolke*

b) *Bestimmen die Regressionsgerade*

Lösung:
Analog zur Aufgabe 3.