14.07.

Hermite - Interpolation

Pro Stützstelle x_k sind nun mehrere Werte erlaubt, die nicht nur die Funktion selbst, sondern auch deren Ableitungen beschreiben:

x_k	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
y_k	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
y_k'		y_1'		y_3'	
y_k''				y_3''	
...					

<u>Gesucht</u>: Polynom $H_n(x)$,

so dass:

$$H_n(x_k) = y_k$$

$$H_n'(x_k) = y_k'$$

....

....

<u>Satz</u>: H_n existiert und ist eindeutig bestimmt.

<u>Folgerung 1</u>: Betrachtet uns die Vielfachheiten der Stützstellen:

#	1	2	3	4	5	6	7	8
x	x_0	x_1	x_1	x_2	x_3	x_3	x_3	x_4

(Insgesamt 8 Wertepaare in unserem Bsp!),

und gelte $x_i \neq x_j$ für verschiedene Nummern $i \neq j$

$\Longrightarrow$ Klassische Interpolation

$\Longrightarrow$ Newton-Verfahren.

Folgerung 2:

$x_0 = x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n$

$$\Rightarrow H_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

$\Rightarrow$ Taylor-Polynom

Denn gilt für die dividierte Differenzen (vgl. Newton-Verfahren):

mit $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots\ldots = x_{i+j}$

$\Downarrow$

$$[x_i; x_{i+1}; \ldots\ldots; x_{i+j}] = \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$$

$\Rightarrow$ <u>Beispiel und Algorithmus für Hermite - Interpolation</u>:

<u>Gegeben</u>: $f(0) = -1$;

$f'(0) = -2$; $f(1) = 0$;

$f'(1) = 10$; $f''(1) = 40$;

(a) Falls $x_i = x_{i+k}$

$$\Rightarrow [x_i; \ldots\ldots; x_{i+k}] = \frac{f_{r(i)+k}}{k!},$$

wobei $r(i)$ die kleinste Nummer ist mit

$$x_r = x_{r+1}$$

(b) Anderfalls (wie bei Newton-Interpolation):

$$[x_i; \ldots\ldots; x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1}; \ldots\ldots x_{i+k}] - [x_i; \ldots\ldots; x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i};$$

Weiter: wie bei Newton - Interpolation.

Gegeben: $f(0) = -1$;

$f'(0) = -2$; $f(1) = 0$;

$f'(1) = 10$; $f''(1) = 40$;

0	1
-1	0
-2	10
	40

$\Rightarrow$ 5 Paare

$\Downarrow$

5 x_i, die sich wiederholen (dürfen):

x	y	$[x_i; x_{i+1}]$	$[x_i; x_{i+1}, x_{i+2}]$	
$x_0 = 0$	-1	$\frac{-2}{1!} = -2$	$\frac{1-(-2)}{1-0} = 3$	
$x_1 = 0$	-1	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$\frac{10-1}{1-0} = 9$	
$x_2 = 1$	0	$\frac{10}{1!} = 10$	$\frac{40}{2!} = 20$	
$x_3 = 1$	0	$\frac{10}{1!} = 10$		
$x_4 = 1$	0			

$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$[x_0, \ldots, x_4]$
$\frac{9-3}{1-0} = 6$	$\frac{11-6}{1-0} = 5$
$\frac{20-9}{1-0} = 11$	

Nun:

$$a_0 = -1 \qquad x_0 = 0$$
$$a_1 = -2 \qquad x_1 = 0$$
$$a_2 = 3 \qquad x_2 = 1$$
$$a_3 = 6 \qquad x_3 = 1$$
$$a_4 = 5 \qquad x_4 = 1$$

$$\begin{aligned} H_n(x) = a_0 &+ \\ + a_1 & (x - x_0) + \\ + a_2 & (x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3 & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + a_4 & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

$$H_n(x) = -1 - 2(x-0) +$$
$$+3(x-0)(x-0) +$$
$$+6(x-0)^2(x-1) +$$
$$+5(x-0)^2(x-1)^2 =$$

$$= -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) +$$
$$+5x^2(x-1)^2$$

Bsp 2:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	1	4
$f'(x)$		2		

$\Longrightarrow$ Hermite-Interpolation

No	x	y			
0	-1	1			
			$\frac{0-1}{0-(-1)}=-1$		
1	0	0		$\frac{2-(-1)}{0-(-1)}=3$	
			$\frac{2}{1!}=2$		$\frac{-1-3}{1-(-1)}=-2$
2	0	0		$\frac{1-2}{1-0}=-1$	
			$\frac{1-0}{1-0}=1$		$\frac{1-(-1)}{2-0}=1$
3	1	1		$\frac{3-1}{2-0}=1$	
			$\frac{4-1}{2-1}=3$		
4	2	4			

$y=f(x)$

x
-1
0
0
1
2

$a_0 = 1$

$a_1 = -1$

$a_2 = 3$

$a_3 = -2$

$a_4 = 1$

$$\frac{1-(-2)}{2-(-1)} = 1$$

$$H(x) = 1 + (-1)(x+1) +$$
$$+ 3(x+1)(x-0) +$$
$$+ (-2)(x+1)(x-0)^2 +$$
$$+ 1\,(x+1)(x-0)^2(x-1) =$$

$$= 1 - (x+1) + 3x(x+1) -$$
$$- 2(x+1)x^2 + (x+1)(x-1)x^2 =$$

$$= 1 - x - 1 + 3x^2 + 3x - 2x^3 - 2x^2 +$$
$$+ x^4 - x^2 =$$
$$= x^4 - 2x^3 + 2x \,;$$

x	H
-1	1
0	0
0	0
1	1
2	4

$$H(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

$$H(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1) =$$

$$= 1$$

$$H(0) = 0$$

$$H(1) = 1^4 - 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1 = 1$$

$$H(2) = 2^4 - 2(2)^3 + 2\cdot 2 =$$

$$= 16 - 16 + 2\cdot 2 = 4$$

$$H'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

$$H'(0) = 2$$

Probe: alles passt!

Bsp.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	0
$f'(x)$	1	2		5
$f''(x)$		4		

Finde ein Polynom, das die Tabelle interpoliert!

\# Werte : 8

$\Downarrow$

Die Nummern : 0, 1, 2, ..., 7

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	3	0
$f'(x)$	1	2		5
$f''(x)$		4		

ö

#	x	y
0	-1	0
1	-1	0
2	0	1
3	0	1
4	0	1
5	1	3
6	2	0
7	2	0

$\frac{1}{1!} = 1$

$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$

$\frac{2}{1!} = 2$

$\frac{2}{1!} = 2$

$\frac{3-1}{1-0} = 2$

$\frac{0-3}{2-1} = -3$

$\frac{5}{1!} = 5$

$\frac{1-1}{0-(-1)} = 0$

$\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$

$\frac{4}{2!} = 2$

$\frac{2-2}{1-0} = 0$

$\frac{-3-2}{2-0} = -\frac{5}{2}$

$\frac{5-(-3)}{2-1} = 8$

$\frac{1-0}{0-(-1)} =$

$\frac{2-1}{0-(-1)} =$

$\frac{0-2}{1-0} =$

$\frac{-\frac{5}{2}-0}{2-0}$

$\frac{8-(-\frac{5}{2})}{2-0}$

1

1

-2

$= -5/4$

$= \frac{21}{4}$

0

$\frac{-2-1}{1-(-1)} = -3/2$

$\frac{-5/4-(-2)}{2-0} = \frac{3}{8}$

$\frac{21/4-(-5/4)}{2-0} = \frac{13}{4}$

$\frac{-3/2-0}{1-(-1)} = -\frac{3}{4}$

$\frac{3/8+3/2}{2-(-1)} = 5/8$

$\frac{13/4-3/8}{2-0} = \frac{23}{16}$

$$\frac{5/8 - (-3/4)}{2 - (-1)} = \frac{11}{24}$$

$$\frac{\cancel{23/16} - \frac{5}{8}}{2 - (-1)} = \frac{13}{48}$$

$$\frac{\frac{13}{48} - \frac{22}{48}}{2 - (-1)} = -\frac{1}{16}$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$a_3 = 1$

$a_4 = 0$

$a_5 = -3/4$

$a_6 = 11/24$

$a_7 = -1/16$

$x_0 = x_1 = -1$

$x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$x_5 = 1$

$x_6 = x_7 = 2$

$$H(x) = 0 + 1(x+1) +$$

$$+ 0(x+1)^2 + 1(x+1)^2 x +$$

$$+ 0(x+1)^2 x^2 - \frac{3}{4}(x+1)^2 x^3 +$$

$$+ \frac{11}{24}(x+1)^2 x^3 (x-1) -$$

$$- \frac{1}{16}(x+1)^2 x^3 (x-1)(x-2) =$$

$$= x+1 + (x+1)^2 x - \frac{3}{4}(x+1)^2 x^3 +$$

$$+ \frac{11}{24}(x+1)^2 x^3 (x-1) -$$

$$- \frac{1}{16}(x+1)^2 x^3 (x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad H(0) = 1$$

Passt!

Bsp 4:

x	-1	0	1
	0	1	0
	1	0	1
		0	
		0	
		1	

5 Paare

#	x	y						
0	-1	0						
			$\frac{1}{1!}=1$					
1	-1	0		0				
			1		-1			
2	0	1		-1		2		
			0		1		-3	
3	0	1		$\frac{0}{2!}=0$		-1		$\frac{37}{24}$
			0		$\frac{0}{3!}=0$		$\frac{25}{24}$	
4	0	1		0		$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$		$-\frac{25}{24}$
			0		0		$-\frac{25}{24}$	
5	0	1		0		-1		$\frac{145}{24}$
			0		-1		5	
6	0	1		-1		4		
			-1		3			
7	1	0		$\frac{1-(-1)}{1-0}=2$				
			1					
8	1	0						

$-\frac{61}{24}$

$\frac{73}{24}$

$\frac{85}{24}$

$$H(x) = 0 + 1(x+1) + 0(x+1)^2 - 1(x+1)^2 x + 2(x+1)^2 x^2 - 3(x+1)^2 x^3 + \frac{87}{24}(x+1)^2 x^4 - \frac{61}{24}(x+1)^2 x^5 + \frac{73}{24}(x+1)^2 x^5 (x-1) =$$

$$= x+1 - (x+1)^2 x + 2(x+1)^2 x^2 - 3(x+1)^2 x^3 + \frac{87}{24}(x+1)^2 x^4 - \frac{61}{24}(x+1)^2 x^5 + \frac{73}{24}(x+1)^2 x^5 (x-1);$$

$H(0) = 1 \quad$ (Probe: OK)