HTW DES SAARLANDES
Fachbereich GIS
Prof. Dr. B. Grabowski
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Mathematik-Software WS 2008/09

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Das Randwertproblem*

$$y'' - y' - 110y = 0, \qquad 0 < x < 10 \qquad (*)$$

$$y(0) = 1, \quad y(10) = 1 \qquad (**)$$

soll mit einem Schießverfahren gelöst werden.

a) Berechnen Sie die exakte Lösung von (*) zu den Anfangswerten $y(0) = s_1$*,* $y'(0) = s_2$ *und hiermit eine Lösung des Randwertproblems. Geben Sie* $s^* := y'(0)$ *zu den Randwerten (**) an.*

b) Welchen Wert $\tilde{y}(10)$ *erhält man aus den Anfangswerten* $\tilde{y}(0) = 1$*,* $\tilde{y}'(0) = 10^{-9} - 10$*? Interpretieren Sie das Ergebnis.*

Lösung:
s. nächste Seite

$$\begin{cases} y'' - y' - 110y = 0 & 0<x<10 \\ y(0) = 1, \quad y(10) = 1 \end{cases} \quad (**)$$

a) $y(0) = s_1, \quad y'(0) = s_2 \quad (*)$

Char. Polynom / Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 110 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 11 \\ \lambda_2 = -10 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Allg. Lösung : $y_{allg} = C_1 e^{11x} + C_2 e^{-10x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Lösung der AWP $(*)$:

$y(0) = s_1, \quad y'(0) = s_2;$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = s_1; \\ 11C_1 - 10C_2 = s_2; \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 10 \\ + \end{matrix} \right. \Rightarrow 21C_1 = 10s_1 + s_2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_1 = \frac{10s_1 + s_2}{21}}$$

$$C_2 = s_1 - C_1 = \frac{21s_1 - 10s_1 - s_2}{21} = \frac{11s_1 - s_2}{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{11s_1 - s_2}{21}}$$

$\Rightarrow$ Lösung von AWP $(*)$:

$$y(x, s_1, s_2) = \frac{1}{21}\left((10s_1 + s_2) e^{11x} + (11s_1 - s_2) e^{-10x}\right)$$

für das RWP $(**)$:

$s_1 = 1 \; ; \quad s_2 = s$ – Parameter;

$$\Rightarrow y(x, s) = \frac{10+s}{21} e^{11x} + \frac{11-s}{21} e^{-10x};$$

Berechne Lösung von Null Problem:

$$y(10, s) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(10+s)e^{110} + (11-s)e^{-100} = 21$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{s_{NS} = \frac{-10e^{110} + 21 - 11e^{-100}}{e^{110} - e^{-100}}}$$

$\Rightarrow$ Lösung von $(**)$:

$$y(x) = y(x, s_{NS}) = \frac{10e^{110} - 10e^{-100} - 10e^{110} + 21 - 11e^{-100}}{21(e^{110} - e^{-100})} e^{11x} +$$

$$+\frac{11e^{110}-11e^{-100}+10e^{110}-21+11e^{-100}}{21\left(e^{110}-e^{-100}\right)}\,e^{-10x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y(x)=\frac{1-e^{-100}}{e^{110}-e^{-100}}\,e^{11x}+\frac{e^{110}-1}{e^{110}-e^{-100}}\,e^{-10x}}$$

$$s^{*}\approx-10$$

b) $\tilde{y}(0)=1=s_1;$

$\tilde{y}'(0)=10^{-8}-10=s_2$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x)=\frac{10^{-8}}{21}e^{11x}+\frac{21-10^{-8}}{21}e^{-10x};$$

$$\tilde{y}(10)=\frac{10^{-8}}{21}e^{110}+\underbrace{\frac{21-10^{-8}}{21}e^{-100}}_{\approx 1\cdot 0=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tilde{y}(10)\approx 3\cdot 10^{37}}$$

mit Par. $s=-10+10^{-8}$

$$\frac{\left(-10e^{110}-11e^{-100}+21\right)\left(e^{110}-e^{-100}\right)-\left(-10e^{110}+10e^{-100}\right)}{21-21e^{-100}}=-10+\frac{21\left(1-e^{-100}\right)}{e^{110}-e^{-100}}$$

$$\approx-10+21\cdot e^{-110}\approx$$

$$\approx-10+3.5\cdot 10^{-47}$$

Also war $s\approx-10+3.5\cdot10^{-47}$;

Also sehr geringe Abweichungen ($<10^{-8}$) für s machen den Ergebnisfehler sehr groß, von Ordnung $O(10^{37})$ $\Rightarrow$ Das Einfachschießverfahren ist auf das RWP eigentlich nicht anwendbar.

(Wie ja, bei so grosser Unterschied zwischen "Eigenwerten" (11 und -10) ist es auch klar, denn das Problem/Gleichung sehr steif ist).

Aufgabe 2 *Betrachten Sie die Randwertaufgabe*

$$y'' - (y')^2 = 0, \qquad -1 < x < 1$$

mit $y(-1) = 0$ *und* $y(1) = \ln 10$.

a) *Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems* $y''-(y')^2 = 0$, $y(-1, s) = 0$, $y'(-1, s) = s$ *an, und berechnen Sie* $\hat{s}$ *so, daß* $y(x, \hat{s})$ *das Randwertproblem löst.*

b) *In welchem Bereich liegen die* s*, die zu einem Pol zwischen* -1 *un* 1 *führen?*

Lösung:
s. nächste Seite

a) Setze $u := y'$

$\Rightarrow u' - u^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\frac{du}{u^2} = dx$ $\quad$ ($u \neq 0$; zwar $y \equiv 0$ – triviale Lösung, weil Gl. homogen ist)

$\frac{1}{v} = -x + c$

$v = \frac{1}{c-x}$

$y' = v = \frac{1}{c-x}$

$\Downarrow$

$$\boxed{y = -\ln(c-x) + d}$$

$y(-1,s) = 0 = -\ln(1+c) + d$

$y'(-1,s) = s = \frac{1}{c+1} \Rightarrow c = \frac{1}{s} - 1$

$\Downarrow$

$d = \ln\left(1 + \frac{1}{s} - 1\right) = \ln\frac{1}{s} = -\ln s$

$$\boxed{d = -\ln s}$$

$\Rightarrow y(x,s) = -\ln\left(\frac{1}{s} - 1 - x\right) - \ln s =$

$= -\ln\left(1 - (1+x)s\right)$

$$\boxed{y(x,s) = \ln\frac{1}{1-(1+x)s}}$$

Suche $\tilde{s}$ solche, daß

$\ln\frac{1}{1-2\tilde{s}} = \ln 10$ $\quad$ (RB)

$\Updownarrow$

$1 - 2\tilde{s} = 0.1$

$\Updownarrow$

$\tilde{s} = \frac{9}{20}$

Also $\boxed{y(x) = y(x,\tilde{s}) = -\ln\left(1 - (1+x)\frac{9}{20}\right)}$ ist Lösung von RWP

b) $y(x,s) = -\ln(1-(1+x)s)$ hat Pol falls

$1-(1+x)s \leq 0$, $(*)$

Da $x \in [-1,1]$, so $(1+x) \geq 0$, und somit:

$(*) \iff 1 \leq (1+x)s \iff \forall x \in (-1,1]$ $s \geq \frac{1}{1+x}$

$\Downarrow$

$$\boxed{s \geq \frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3 *Gegeben sei das lineare Randwertproblem 2. Ordnung*

$$y'' - 100y = 0, \quad 0 < x < 3$$

$$y(0) = 1, \qquad y(3) = e^{-30}.$$

a) Lösen Sie das Randwertproblem analytisch.

b) Welche Lösung $y(x,s)$ erfüllt die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = s$?

c) Wie verhält sich $|y(3, s+\delta s) - y(3,s)|$ im Verhgleich zu δs? Welche Schwierigkeiten ergeben sich hieraus für die numerische Realisierung des Schießverfahrens?

<u>Lösung:</u>
s. nächste Seite

$$\begin{cases} y'' - 100y = 0 \quad , \quad 0 < x < 3 \\ y(0) = 1; \\ y(3) = e^{-30}; \end{cases}$$

a) Die char. Gleichg. $\lambda^2 - 100 = 0$

$$\Downarrow$$

$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = -10.$

$\Rightarrow$ Allg. Lösung: $y(x) = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$y(0) = c_1 + c_2 = 1$

$y(3) = c_1 e^{30} + c_2 e^{-30} = e^{-30};$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} c_2 = 1; \\ c_1 = 0; \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = e^{-10x}}$$

s. nächste Seite

b) $y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad \Big| \cdot 10$
$y'(0) = 10c_1 - 10c_2 = s; \quad \Big| \quad +$

$20c_1 = 10 + s; \quad \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{10+s}{20}}$

$c_2 = 1 - c_1 = \boxed{\frac{10-s}{20} = c_2}$

$\Rightarrow \boxed{y(x,s) = \frac{10+s}{20} e^{10x} + \frac{10-s}{20} e^{-10x};}$

Bestimme ges. $\bar{s}$ als Nullstelle von $F(s)$:

$F(s) = y(3, s) - e^{-30}$

$F(\bar{s}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{10+\bar{s}}{20} e^{30} + \frac{10-\bar{s}}{20} e^{-30} - e^{-30} = 0$

$\Leftrightarrow (10+\bar{s}) e^{30} + (10-\bar{s}) e^{-30} - 20 e^{-30} = 0;$

$\Leftrightarrow (e^{30} - e^{-30}) \bar{s} = 20e^{-30} - 10 (e^{30} + e^{-30}) =$

$= 10 (e^{-30} - e^{30})$

$\Downarrow$

$\bar{s} = -10;$

$\Rightarrow y(x) = y(x, \bar{s}) = e^{-10x}$, also genau die Lösung aus Teil a)

c) Betrachte $|y(3, s+\Delta s) - y(3,s)|$;

$|y(3, s+\Delta s) - y(3,s)| = \left| \frac{10+s+\Delta s}{20} e^{30} + \frac{10-s-\Delta s}{20} e^{-30} - \frac{10+s}{20} e^{30} - \frac{10-s}{20} e^{-30} \right| =$

$= \left| \frac{\Delta s}{20} e^{30} - \frac{\Delta s}{20} e^{-30} \right| = |\Delta s| \frac{e^{30} - e^{-30}}{20} \approx |\Delta s| \cdot 5.3 \cdot 10^{11}$

Also schon bei kleinem Δs ist die Differenz zwischen exakter und gestörter Lösung spürbar. (wieder, wie in Aufgabe 1, folgt das unmittelbar aus rel. großer Differenz von EW (Δs :)), also wieder das System ist steif :)). Das System ist sehr sensibel bzgl. Änderungen von Startwert $y'(0) = s$.
Also das Einfachschießverfahren wird keine gute Ergebnisse liefern, denn Rundungsfehler beeinflusst Resultat stark. Nur bei $|\Delta s| < 10^{-12}$ liefert das Verfahren mehr/weniger akzeptable Lösung.