Mathematiques appliquées
DFHI M WS-09/10 21.10.2010
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Probeklausur

Aufgabe 1 *(4+2 Punkte)*

Lösen Sie mit Hilfe von LR-Zerlegung das Gleichungssystem

$$Ax = b,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 12 & 21 & 24 & 27 & 32 \\ 18 & 35 & 48 & 54 & 64 \\ 24 & 49 & 72 & 90 & 106 \\ 30 & 63 & 96 & 126 & 159 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

und die rechte Seite $b = (9, 20, 34, 58, 93)^T \in \mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*

Während eines Experiments hat man die Werte an fünf stellen gemessen und folgende Wertepaare ermittelt:

$$(1, 10), (2, 5), (3, 10/3), (4, 5/2), (5, 2).$$

Inmterpolieren Sie die Daten und geben Sie das Polynom in Normalform $p(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$ *an.*

Welches Interpolationspolynom ergibt sich, wenn die 5 vorgegebene Punkte durch den weiteren Punkt $(-1, 1)$ *ergänzt werden?*

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie das zu der folgenden Wertetabelle gehörende interpolierende Polynom in der Form $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$*:*

x_k	1	3	4
$f(x_k)$	-2	3	0
$f'(x_k)$		4	
$f''(x_k)$		2	

Aufgabe 4 *(3+2 Punkte)*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}.$$

a) *Zeigen Sie, daß es im abgeschlossenen Intervall* $[0.1,\ 1]$ *genau eine Lösung der Gleichung x=f(x) gibt, indem Sie*

- *überprüfen, daß* f *das Intervall* $[0.1,\ 1]$ *in sich abblidet und*
- *nachweisen, daß* f *kontrahierend ist.*

b) *Wieviele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert* $x_0 = 0.1$ *höhstens nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von* $\epsilon = 10^{-2}$ *zu approximieren?*

(Sollten Sie bei a) keine Lipschitz-Konstante ermittelt haben, arbeiten Sie bitte mit $L = 0.9$*.)*

Aufgabe 5 *(4+1 Punkte)*

Lösen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung nach dem Hausholder-Verfahren das Gleichungssystem

$$Ax = b,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite $b = (9, 20, 34, 58, 93)^T \in \mathbb{R}^5$.