Mathematiques appliquées
DFHI WS 09/10
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Übungsblatt 6

Interpolation und Approximation.

Aufgabe 1 *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom durch die vier Punkte* $(0, 1)$*,* $(1, 2)$*,* $(3, 3)$*,* $(4, 2)$ *mit verschiedenen Methoden (Vandermonde-Matrix, Lagrange, Newton).*

Aufgabe 2 *Vervollständigen Sie das folgende Differenzenschema für ein Newtonisches Interpolationspolynom:*

x	y			
*	-2			
		2		
0	0		-1	
		0		*
1	*		2	
		*		
2	4			

Ergänzen Sie das Schema und geben Sie das Newtonsche Interpolationspolynom an.

Aufgabe 3 ***(Abschätzung der Anzahl von den benötigten Stützstellen bei vorgegebener Genauigkeit)***

a) Zur Interpolation einer Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *werde eine äquidistante Zerlegung des Intervalls verwendet, d.h. bei gegebenem* $0 < N \in \mathbb{N}$ *wählt man* $x_k := (2k)/N$ *für* $k = 0, ..., N$*. Zeigen Sie, daß in diesem Fall die in der Vorlesung eingeführte Funktion* $\phi(x) := \prod_{k=0}^{N}(x - x_k)$ *die folgende Abschätzung erfüllt:*

$$|\phi(x)| \leq (N + 1)! \left(\frac{2}{N}\right)^{N+1} \qquad \forall x \in [0, 2].$$

b) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

soll auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ durch ein Polynom interpoliert werden. Dazu soll das Intervall I durch ein äquidistantes Gitter unterteilt werden, d.h. die Stützstellen der Interpolation sind

$$x_k = -1 + k\frac{2}{N}, \qquad k = 0, ..., N.$$

Wie muß man N wählen, so daß der Interpolationsfehler auf jeden Fall kleiner als $\epsilon = 10^{-4}$ wird? Benutzen Sie hierbei die aus dem Teil a) bekannte Abschätzung.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Daten:

a)

x_i	-1	0	1
f_i	1	-3	-3

b)

x_i	0	1	2
g_i	-3	-3	-1

c)

x_i	-1	0	1	2
h_i	1	-3	-3	-1

.

a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zu f nach Lagrange und nach Newton.*

b) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $q(x)$ zu g nach Newton*

c) *Berechnen Sie das Interpolationspolynom $r(x)$ zu h in der Newton'schen Form, wobei Sie die schon berechneten Tabellen aus a) und b) verwenden.*

Aufgabe 5

Polynominterpolation der Daten

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\tan(x_i)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

liefert ein Näherungspolynom p für die Tangensfunktion.

a) *Mit welchem Fehler $R(x) = |\tan(x) - p(x)|$ ist an der Stelle $x = 0.4$ höhstens zu rechnen?*

b) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p und berechnen Sie den wirklichen Fehler $R(0.4) = |\tan(0.4) - p(0.4)|$ mit dem (Taschen)rechner.*